Una introducción a la teoría de integración en una variable compleja

Andrés Felipe Rubio Rojas
Código:200711673

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad Seccional Duitama, Licenciatura en Matemáticas y Estadística
Duitama - Boyacá, Colombia
2015

Una introducción a la teoría de integración en una variable compleja

Andrés Felipe Rubio Rojas
Código:200711673

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas y Estadística

Director:
M.Sc. Jaime Alberto Reyes Triana

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad Seccional Duitama, Licenciatura en Matemáticas y Estadística
Duitama - Boyacá, Colombia
2015

A mi madre y a mis hermanos.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos a:

- Mi madre Rosa Helena Rojas, mis hermanos Sebastián y Natalia y mis amigos, quienes me dieron motivos para seguir adelante.

- Al director de esta monografía, el profesor Jaime Alberto Reyes Triana por su apoyo incondicional, sus enseñanzas y consejos, los cuales aportaron al desarrollo de este trabajo.

- A los profesores de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística con los que tuve la fortuna de recibir clases o asesorías, en especial al profesor Luis Arbey Gómez Gómez, quien me ayudó a redactar y a dar formato a este trabajo con el software LaTeX.

Contenido

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es una recopilación bibliográfica relacionada con la teoría de integración en una Variable Compleja, en concordancia con la necesidad del fortalecimiento de las bases teóricas en Análisis Complejo para estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística, especialmente, para los estudiantes que deseen profundizar en el área de matemáticas, con el fin de que estos sean competitivos en el campo laboral.
A pesar de que dicho programa carece de un curso formal de Análisis Complejo, se elabora una estructura la cual muestra lo que debe tener aquel curso. Quizá, seguramente después de presentado este proyecto, se pensará seriamente en la adición de un curso formal de Análisis Complejo dentro de la malla curricular de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística.
También se hizo pensando en la profundización en el área de matemáticas en el aspecto personal y, teniendo en cuenta que el análisis complejo ha sido mencionado pocas veces a lo largo de la carrera profesional. Este trabajo es un estudio, que si bien pretende ser lo más minucioso posible, muestra conceptos básicos de la teoría de integración de funciones de Variable Compleja.
Hablando un poco de historia, aquellos números que se hacen llamar “complejos fueron motivo de controversias por mucho tiempo dentro de la comunidad científica. De a poco, se ha demostrado la utilidad de este conjunto numérico, por lo que terminaron siendo aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501 1576) y Bombelli (1526 1672) relacionados con el cálculo de las raíces de las ecuaciones de tercer grado. Fue René Descartes (1596 1650) quien planteó que ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación y les dio el calicativo de imaginarias para referirse a dichas soluciones.
Euler y Gauss se dedicaron a buscar formas de aplicar los números complejos en vez de cuestionar la naturaleza de éstos (no serían los únicos). Este último probó lo que se conoce como el teorema fundamental del Álgebra, dando así una sólida base matemática junto a otros matemáticos como Cauchy, Weierstrass, Riemann, entre otros.
El capítulo uno de este documento muestra lo que se debe saber antes de abordar la teoría de integración en el plano complejo: Álgebra y geometría de los complejos, topo-

logía en el plano complejo, funciones complejas, cálculo diferencial complejo, ecuaciones de Cauchy-Riemann y las funciones armónicas. Para el estudio de estos temas se utilizaron los textos: [3],[4], [6], [7] y [8].
En los capítulos siguientes, se muestran las definiciones relacionadas con la integración en el plano complejo, por mencionar las más importantes: Integrales curvilíneas, Teorema de Cauchy-Goursat, Fórmula de la integral de Cauchy, Consecuencias de la fórmula integral de Cauchy, Series de Taylor y Laurent, Singularidades, Polos y Residuos. Para el estudio de este capítulo se utilizaron, principalmente, los libros [1], [3], [7] y [9].

1 PRELIMINARES

1.1. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Como el cuadrado de un número real cualquiera es positivo o nulo, no es posible resolver la ecuación $x^2 = -1$ mediante números reales. Para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario introducir los números complejos. Estos números son de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria[1], donde $i = \sqrt{-1}$ y, por tanto $i^2 = -1$.
Sea $z = a + bi$, (donde z es considerada una variable compleja: a es la parte real y b es la parte imaginaria, denotándolas $\mathrm{Re}\{z\}$ e $\mathrm{Im}\{z\}$, respectivamente). Si $\mathrm{Im}\{z\} = 0$, entonces z es un número real, es decir, los números reales son números complejos con parte imaginaria nula; por otro lado, si $\mathrm{Re}\{z\} = 0$, entonces z es considerado un número imaginario puro.
A partir de la anterior información, se muestra el siguiente esquema:

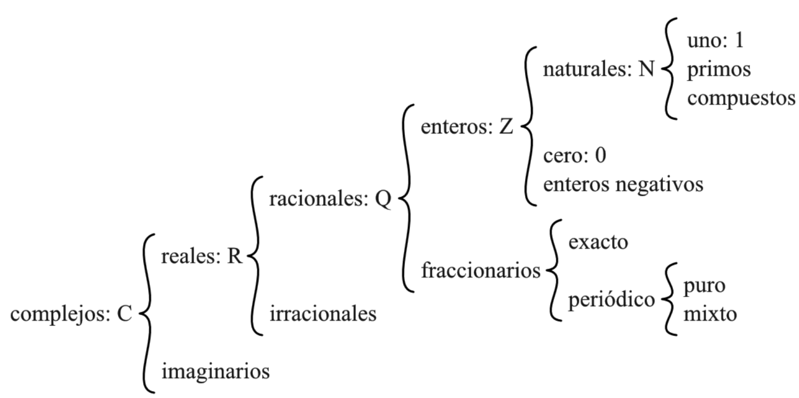


Figura 1-1: Sistemas Numéricos

[1]La notación i fue introducida por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) en 1779.

1.2. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Hay que tener en cuenta que $i^2 = -1$ para el desarrollo de las siguientes operaciones.

1. Suma
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
2. Resta
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
3. Producto
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
4. Cociente: si $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces[2]
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

1.3. CONJUGACIÓN

La variable z tiene un conjugado, el cual se define como $\overline{z} = x - iy$. Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \text{si } z_2 \neq 0$$

$$\mathrm{Re}\{z\} = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}\{z\} = \frac{z + \overline{z}}{2i}$$

$$z\overline{z} = |z|^2$$

1.4. VALOR ABSOLUTO

Si $z = x + iy$, el valor absoluto de z se representa por $|z|$ y se define como la raíz cuadrada de $x^2 + y^2$. Así pues,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}$$

[2]para llegar al resultado posterior, se deben multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de éste último

Es evidente que $|z| > 0$ excepto cuando $z = 0$. La expresión $|z|$ se llama con frecuencia el módulo de z.
Así como en la variable real, en la variable compleja se cumplen las siguientes propiedades del valor absoluto. Supóngase $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m$ números complejos, se tiene que:

- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Esta última es conocida como la desigualdad triangular y, en general se puede probar que:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_m|$$

1.5. FUNDAMENTOS AXIOMÁTICOS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Además de expresarse el número complejo como $a+bi$, también se puede expresar como un par ordenado (a, b). De esta manera, las operaciones fundamentales se representan de la siguiente manera:

- Igualdad: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$
- Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
- Propiedad Distributiva: $m(a, b) = (ma, mb)$, donde m es una constante.

Y teniendo $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m$ números complejos, se puede probar que:

- Ley de cerradura: $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ también son números complejos.
- Ley conmutativa de la suma: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- Ley asociativa de la suma: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- Ley conmutativa de la multiplicación: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

- Ley asociativa de la multiplicación: $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$.

- Ley distributiva de la suma respecto a la multiplicación: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

- Elemento neutro de la suma: $z+0 = z$. El cero se puede expresar como el complejo $0 + 0i$.

- Elemento neutro de la multiplicación: $z * 1 = z$. La unidad se puede expresar como el complejo $1 + 0i$.

- Inverso aditivo: para cualquier $z_1 \neq 0$, existe algún z, tal que $z_1 + z = 0$.

- Inverso multiplicativo. Si $z_1 \neq 0$, existe algún z, tal que $z_1 \cdot z = 1$.

1.6. REPRESENTACION GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Se vio anteriormente que un número complejo $x + iy$ se puede considerar como una pareja ordenada de números reales (x, y), entonces estos números se pueden representar mediante puntos en el plano xy, dicho plano se conoce como el plano complejo o diagrama de Argand.[3] De tal manera que a cada número complejo le corresponde uno y solamente un punto en el plano y recíprocamente a cada punto en el plano le corresponde uno y solamente un número complejo. En algunos casos el número z también se menciona como el punto z. El eje x y el eje y de dicho plano se conocen también como eje real y eje imaginario, respectivamente.

1.6.1. Distancia entre dos puntos

Al igual que en el plano real, la distancia entre dos puntos en el plano complejo está dado por

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

[3] Se acredita a Jean-Robert Argand (1768-1822) como el creador de dicho diagrama, sin embargo fue descrita antes por Caspar Wessel (1745-1818).

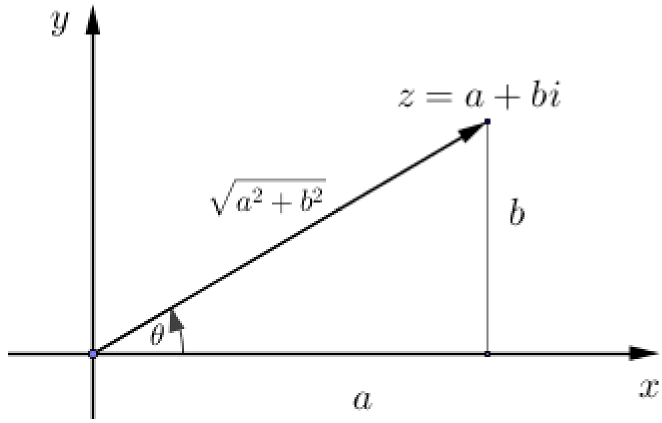


Figura 1-2: Diagrama de Argand

1.7. FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Si z es un punto en el plano complejo correspondiente al número complejo (a, b) o $a+bi$, entonces se puede apreciar mediante funciones trigonométricas que (Véase Figura 1)

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

donde r es el módulo de z y θ es la amplitud o argumento de z (denotado por $\arg\{z\}$). Se deduce entonces que:

$$z = x + iy$$

se puede escribir como

$$z = r\cos\theta + ri\operatorname{sen}\theta$$

factorizando

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Esta última es llamada la forma polar del número complejo, y r y θ se llaman coordenadas polares.
Para cualquier número complejo corresponde solamente un valor de θ en $0 \le \theta \le 2\pi$. No obstante, cualquier otro intervalo de longitud 2π, por ejemplo $-\pi \le \theta \le \pi$, se puede emplear. Cualquier elección particular, se llama la parte principal y el valor de θ se llama valor principal del argumento que se denota como $\operatorname{Arg}\{z\}$.

1.8. IDENTIDAD DE EULER

Se sabe que

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i \end{array}$$

y así sucesivamente. Ahora expresando mediante series de Maclaurin (Series de Taylor alrededor de cero) las funciones $e^x, \operatorname{sen} x$ y $\cos x$, donde x es un número real se obtienen

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Se aplica la sustitución $x = i\theta$, de tal manera que

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \frac{i\theta^0}{0!} + \frac{i\theta^1}{1!} + \frac{i\theta^2}{2!} + \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \frac{i\theta^6}{6!} + \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{i\theta^8}{8!} + \cdots \\ &= \frac{\theta^0}{0!} + i\frac{\theta^1}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(\frac{\theta^0}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta^1}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Llamada la identidad de Euler. A partir de lo anterior, entonces, $z = re^{i\theta}$.

1.9. EL TEOREMA DE DE MOIVRE

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, se tiene que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\}$$

Una generalización del producto de números complejos conduce a

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\}$$

Ahora, supóngase que $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, la anterior expresión queda

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

La cual se conoce como el teorema de De Moivre[4].

1.9.1. Raíces de números complejos

Un número complejo w es llamado una raíz n-ésima de un número complejo z si $w^n = z$ y se escribe $w = z^{1/n}$. Del teorema de De Moivre, se puede demostrar que si n es un entero positivo,

$$z^{1/n} = \{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\}^{1/n}$$

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\}$$

para $k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1$.

1.9.2. Raíces n-ésimas de la unidad

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, siendo n un entero positivo, se llaman las raíces n-ésimas de la unidad y están dadas por

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{2k\pi/n}$$

para $k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1$. Geométricamente, estas raíces representan los n vértices de un polígono inscrito en una circunferencia de radio uno.

1.10. INTERPRETACIÓN VECTORIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo (x, y) se puede considerar como un punto OP cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final P es el punto (x, y).
La suma de números complejos corresponde a la ley del paralelogramo para la suma de vectores (Figura 2-3). En este caso, para sumar z_1 y z_2 se completa el paralelogramo $OABC$ cuyos lados OA y OC corresponden a z_1 y z_2. La diagonal OB corresponde a $z_1 + z_2$.

[4]Nombrada así por el matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754)

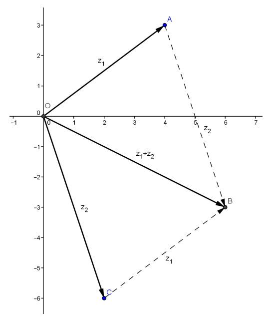
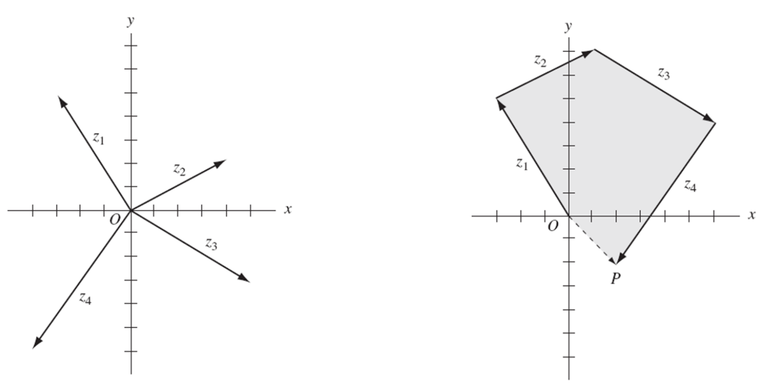


Figura 1-3: Suma de vectores con GeoGebra

Si se van a sumar más de dos vectores, por ejemplo, dados cuatro vectores z_1, z_2, z_3 y z_4 (Figura 2-4), se parte desde el origen para trazar z_1, desde la punta de dicho vector se traza z_2, y así sucesivamente hasta trazar z_4; el vector $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ se traza desde el origen hasta la punta del último vector (Figura 4).



(a) Representación de los cuatro vectores desde el origen

(b) Suma de los cuatro vectores

Figura 1-4: Vectores desde el origen

1.11. ESPACIOS MÉTRICOS Y LA TOPOLOGÍA EN $\mathbb{C}$

1.11.1. Definición y ejemplos de espacios métricos

Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una función de $X \times X$ en $\mathbb{R}$, llamada una función distancia o métrica, el cual satisface las siguientes condiciones para x, y y z en X:

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0$, si y sólo si $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ Simetría.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Desigualdad triangular

Si se establecen x y $r > 0$ entonces se define:

$$B(x, r) = \{y \in x : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in x : d(x, y) \leq r\}$$

$B(x, r)$ y $\overline{B}(x, r)$ se denominan discos o bolas (abiertas y cerradas, respectivamente), con centro x y radio r.

Ejemplos

- Sea $X = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y se define $d(z, w) = |z - w|$[5]. Esto hace que $(\mathbb{R}, d)$ y $(\mathbb{C}, d)$ sean espacios métricos. En efecto, $(\mathbb{C}, d)$ será el ejemplo de interés.
- Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$; entonces (Y, d) es también un espacio métrico.
- Sea $X = \mathbb{C}$ y se define $d(x + iy, a + ib) = |x - a| + |y - b|$. Entonces $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico.
  Cuando $x+iy \neq a+ib$ entonces $d(x+iy, a+ib) \geq 0$. Ahora, cuando $x+iy = a+ib$ se cumple que $d(x+iy, a+ib) = 0$. La simetría se cumple puesto que, por ejemplo, $|x - a|$ es equivalente a $|a - x|$. Por último, la desigualdad triangular se cumple si se supone la existencia de oro complejo $\alpha + i\beta$. Entonces

  $$d(x + iy, a + ib) \leq d(x + iy, \alpha + i\beta) + d(\alpha + i\beta, a + ib).$$

- Sea $X = \mathbb{C}$ y se define $d(x + iy, a + ib) = \text{máx}\{|x - a| + |y - b|\}$.
- Sea $X = \mathbb{R}^n$ y para $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define

  $$d(x, y) = \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

[5]Esta métrica es muy usual, de manera que de aquí en adelante se usará esta métrica.

1.11.2. Conjuntos abiertos

Para un espacio métrico (X, d) un conjunto $G \subset X$ es abierto si para cada x en G existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset G$.
Por lo tanto, un conjunto en $\mathbb{C}$ es abierto si no tiene "borde". Por ejemplo, $G = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}\{z\} < b\}$ es abierto; pero $\{z : \mathrm{Re}\{z\} < 0\} \cup \{0\}$ no lo es porque $B(x; \varepsilon)$ no está contenida en este conjunto sin importar el tamaño de ε.

1.11.3. El plano complejo

El conjunto τ de todos los abiertos en $\mathbb{C}$ se denomina la topología usual de $\mathbb{C}$. La pareja $(\mathbb{C}, \tau)$ se denomina el espacio topológico de los números complejos o, simplemente, el plano complejo.

1.11.4. Conjuntos cerrados

Un conjunto $F \subset X$ es cerrado si su complemento $X - F$ es abierto.
Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:

1. Los conjuntos X y $\varnothing$ son cerrados.
2. Si $F_1, \cdots, F_n$ son conjuntos cerrados en X entonces $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ también es cerrado.
3. Si $\{G_j : j \in J\}$ es cualquier colección de conjuntos cerrados en X, J cualquier conjunto de indexación, entonces $F = \cap\{F_j : j \in J\}$ también es cerrado.

1.11.5. Puntos en el plano complejo

Se dice que a es un punto de acumulación de A, si $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. El conjunto $D(A)$ de los puntos de acumulación de A se denomina el conjunto derivado de A.
Sea A un subconjunto de X. Entonces el interior de A (denotado como int A) es el conjunto

$$\bigcup\{G : G \text{ es abierto y } G \subset A\}$$

Cada punto $a \in \mathbb{C}$ es un punto adherente a $A \subset \mathbb{C}$, si $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$ para todo $r > 0$.
La clausura o adherencia de A (denotada como $\overline{A}$), es el conjunto

$$\bigcap\{F : F \text{ es cerrado y } F \subset A\}$$

Note que int A puede estar vacío y $\overline{A}$ puede ser X. Mediante las proposiciones de los conjuntos abiertos y cerrados, se tiene que $\overline{A}$ es cerrado e int A es abierto. El límite de A se denota como ∂A y está definido por

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$$

Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico (X, d). Entonces:

1. A es abierto si y solo si $A = \text{int } A$

2. A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$

3. $\text{int } A = X - \overline{(X - A)}$; $\overline{A} = X - \text{int } (X - A)$; $\partial A = \overline{A} - \text{int } A$

4. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5. $x_0 \in \text{int } A$ si y solo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0; \varepsilon) \subset A$

6. $x_0 \in \overline{A}$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, $B(x_0; \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$

1.11.6. Densidad de un conjunto

Un subconjunto A de un espacio métrico X es denso si $\overline{A} = X$.
El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $\{x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{C}$.

1.12. CONEXIDAD

Una desconexión de un subconjunto X de $\mathbb{C}$ es una pareja (U, V) de subconjuntos no vacíos y abiertos en X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \dot{\varnothing}$. Se dice que un subconjunto X de $\mathbb{C}$ es disconexo si X admite una desconexión. En caso contrario, se dice que X es conexo.
Decir que X es conexo es equivalente a decir que X no admite subconjuntos propios a la vez abiertos y cerrados en X. Un subconjunto D de un espacio métrico X es un componente de X si es un máximo subconjunto conexo de X. Esto es, D es conexo y no hay subconjuntos conexos de X que de manera adecuada contengan a D.

1.13. SUCESIONES Y COMPLETITUD

Si $\{x_1, x_2, \cdots\}$ es una sucesión en un espacio métrico (X, d) entonces $\{x_n\}$ converge a X, simbólicamente

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$.
De otra forma, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si $d(x, x_n) = 0$.
Si $X = \mathbb{C}$ entonces $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $|z - z_n| < \varepsilon$ cuando $n \geq N$.
Si $A \subset X$ entonces un punto x en X es un punto límite de A si hay una sucesión $\{x_n\}$ de puntos distintos en A tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Una sucesión $\{x_n\}$ es llamada una sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $m, n \geq N$.
Si $d(X, d)$ tiene la propiedad de que cada sucesión de Cauchy tiene un límite en X, entonces $d(X, d)$ es completo.

1.14. COMPACIDAD

Un subconjunto K de un espacio métrico X es compacto si para cada colección $\mathcal{G}$ de conjuntos abiertos en X con la propiedad

$$K \subset \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}\}$$

Existe un número finito de conjuntos $G_1, \cdots, G_n$ en $\mathcal{G}$ tal que $K \subset G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$.
Una colección de conjuntos $\mathcal{G}$ que satisfagan la propiedad anteriormente mencionada se denomina una cubrimiento de K; si cada miembro de $\mathcal{G}$ es un conjunto abierto, dicha colección es llamada cubrimiento abierto de K.
Claramente, el conjunto vacío y todos los conjuntos finitos son compactos. Un ejemplo de un conjunto no compacto es

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Si

$$G_n = \left\{ z : |z| < 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

para $n = 2, 3, \cdots$, entonces $\{G_2, G_3, \cdots\}$ es una cubrimiento abierta para D para el cual no hay un subcubrimiento finito.

Un espacio métrico (X, d) es secuencialmente compacto si cada sucesión en X contiene una subsucesión convergente.

1.15. CONTINUIDAD

Sean (X, d) y (Ω, ρ) espacios métricos y sea $f : X \to \Omega$ una función. Si $a \in X$ y $\omega \in \Omega$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \omega$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x), \omega) < \varepsilon$ siempre que $0 < d(x, a) < \delta$. La función f es continua en el punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si f es continua en cada punto de X entonces f es una función continua de X a Ω.
Una función $f : (X, d) \to (\Omega, \rho)$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (dependiente únicamente de ε) tal que $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ siempre que $d(x, y) < \delta$.
Se dice que f es una función de Lipschitz si existe una constante $M > 0$ tal que $\rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$ para todo x e y en X.
Se puede verificar que cada función Lipschitz es uniformemente continua. Si se da el valor de ε, se toma $\delta = \varepsilon/M$. Inclusive se puede verificar que cada función uniformemente continua es continua.
Las siguientes definiciones son importantes para el estudio de los puntos en el plano complejo y para la continuidad, por ende, también son importantes para el estudio de las funciones analíticas:

- **Propiedad de Bolzano-Weierstrass:** Sea (X, d) un espacio métrico, entonces X tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass o que es compacto por punto límite o por punto de acumulación si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

- **Teorema de Heine-Borel:** Sea (X, d) un espacio métrico y un subconjunto $K \subset X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

  (i) K es compacto.

  (ii) K tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

  (iii) K es secuencialmente compacto.

  Demostración

- "(i)⇒(ii)". Suponga que $A \subset K$ un subconjunto infinito que no tiene ningún punto de acumulación. Entonces para $x \in K$ existe una bola abierta $B(x, r_x)$ que no corta a A o bien, solamente lo corta en el propio punto x.
  La familia $\{B(x, r_x)\}_{x\in K}$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto K y, por tanto, admite un subrecubrimiento finito. Este subrecubrimiento finito también recubre a A, con lo que A sería finito, llegando a una contradicción.

- "(ii)⇒(iii)". Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en K con un número finito de términos distintos, entonces a partir de un cierto término es constante, por lo que converge a dicho término y no hay nada que probar. Supóngase entonces que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en K con infinitos términos distintos. Según (ii), dicha sucesión tiene un punto de acumulación $x \in K$ y existe una subsucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$convergente a x. Por tanto, K es secuencialmente compacto.

- "(iii)⇒(i)". Supóngase que K es secuencialmente compacto y que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una recubrimiento abierto de K. Entonces existe un número $r > 0$ para este recubrimiento. K es totalmente acotado, de manera que existe un recubrimiento finito de X por bolas de radio r, $\{B(x_1, r) \cdots B(x_n, r)\}$. Pero cada bola $B(x_i, r)$ ha de estar contenida en un abierto A_j del recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$, por lo que $\{A_1 \cdots A_n\}$ es un subrecubrimiento finito de X.

1.16. FUNCIONES COMPLEJAS

Al igual que una función de variable real, la función de una variable compleja está compuesta por una variable independiente (por lo general se denota como z), que toma valores complejos dentro de una región[6]. A cada valor de z perteneciente a dicha región corresponderá un valor de la variable dependiente w, y se afirma que w es una función que depende de z, es decir, que $w = f(z)$ en esta región. Ahora, supóngase que $w = u + iv$ donde u y v son números reales que dependen de x e y, entonces la función anterior se puede expresar como:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Si se usan coordenadas polares r y θ, en vez de x e y, entonces:

$$w = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

[6]A menudo la región será todo el plano complejo

Por ejemplo, sea $f(z) = z^2$. Como $z = x + iy$.

$$f(x + iy) = (x + iy)^2$$

Desarrollando el cuadrado, se obtiene:

$$f(x + iy) = x^2 + 2ixy + y^2$$

Reordenando la expresión, de tal manera que queden separadas las partes real e imaginaria se tiene:

$$f(x + iy) = (x^2 + y^2) + i(2xy)$$

donde $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Ahora usando coordenadas polares, se obtiene:

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2$$

Y aplicando el Teorema de De Moivre:

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \\ f(re^{i\theta}) &= r^2 \cos 2\theta + ir^2 \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}$$

Donde $u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ y $v(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

1.17. LAS FUNCIONES TRASCENDENTES BÁSICAS

Existe cierta familiarización por parte del lector con numerosas funciones que se usan en la variable real y, hasta el momento, sólo se han mencionado los polinomios en $\mathbb{C}$. A continuación, se procede a mencionar las funciones más conocidas en la variable compleja. En caso de que la variable z tenga parte imaginaria nula, estas funciones se reducirán a las funciones reales usuales.

1.17.1. La Función Exponencial

La función exponencial compleja está dada por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Propiedades

- En forma polar, el módulo de la función exponencial esta dado por e^x y uno de los valores del argumento es y, es decir, $\arg(e^z) = y + 2k\pi$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$
- La ecuación $e^z = 0$ no tiene solución en el plano complejo.
- En caso que $y = 0$ la función se reduce a la función real e^x.

1.17.2. Funciones Trigonométricas

La identidad de Euler indica que cuando θ es un número real, se tiene

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Ahora bien, si se cambia el signo de θ en la expresión anterior, se obtiene

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$

Sumando las anteriores ecuaciones se obtiene la expresión real

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

finalmente,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

En caso contrario, si se hubieran restado las expresiones, se habría obtenido

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen}\theta$$

es decir,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

A partir de las anteriores ecuaciones, es natural definir $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, donde z es complejo, de la siguiente manera

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Las demás funciones trigonométricas de argumentos complejos se definen fácilmente por analogía con las funciones de argumento real, es decir

- $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$
- $\sec z = \dfrac{1}{\cos z} = \dfrac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$
- $\cot z = \dfrac{1}{\tan z} = \dfrac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$
- $\csc z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z} = \dfrac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$

Todas las identidades relacionadas con las funciones trigonométricas de variable real son también validas para la variable compleja, por ejemplo, con la ayuda de las funciones mencionadas antes se puede demostrar que

- $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
- $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
- $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$
- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$
- $\cos(-z) = \cos z$
- $\tan(-z) = -\tan z$
- $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$
- $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$

El seno y coseno de un número real son números reales cuyo valor absoluto es inferior o igual a 1. Sin embargo, el seno y el coseno de un número complejo no son sólo, en general, complejos, sino que ademas su módulo puede ser mayor que 1.

1.17.3. Funciones Hiperbólicas

Las ecuaciones que definen las funciones $\operatorname{senh}\theta$ y $\cosh\theta$ para un número real θ, indican las siguientes definiciones para el caso de un número complejo z:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Las otras funciones hiperbólicas se derivan directamente del seno y coseno hiperbólicos

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}$$

$$\coth z = \frac{1}{\tanh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

Todas las identidades relacionadas con las funciones hiperbólicas de variable real son también validas para la variable compleja, por ejemplo, con la ayuda de las funciones hiperbólicas se puede demostrar que

- $\operatorname{senh}^2 z - \cosh^2 z = 1$
- $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$
- $\coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$
- $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$
- $\cosh(-z) = \cosh z$
- $\tanh(-z) = -\tanh z$
- $\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$
- $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$
- $\tanh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$

Además, entre las funciones trigonométricas complejas y las funciones hiperbólicas complejas existen las siguientes relaciones:

- $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$
- $\cos iz = \cosh z$
- $\tan iz = i \tanh z$
- $\operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z$
- $\cosh iz = \cos z$
- $\tanh iz = i \tan z$

1.17.4. La Función Logaritmo Natural

Si $z = e^w$, entonces se escribe $w = \ln z$, llamado el logaritmo natural de z. Entonces la función logarítmo natural es la inversa de la función exponencial y se define así

$$w = \log z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ Obsérvese que $\ln z$ es una función multiforme, es decir, que para cada z existen infinitos valores de w. El valor principal o rama principal de $\ln z$ está dado como $\ln r + i\theta$, es decir, cuando $k = 0$ donde $0 \leq \theta < 2\pi$. Sin embargo, se puede utilizar otro intervalo de longitud 2π.

1.17.5. Exponenciales Complejos

Sea c un número complejo, se obtiene la siguiente expresión

$$w = z^c = e^{c \ln z}$$

Al estar presente la función logaritmo multiforme, se asume que las potencias de z son multiformes. Obsérvese que si $c = 1/n$, se obtiene el valor principal de la raíz n-ésima de la base z mencionada anteriormente.

1.17.6. Funciones Trigonométricas Inversas

Sea $z = \operatorname{sen} w$. al valor de w se le llama $\operatorname{arc\,sen} z$, o $\operatorname{sen}^{-1} z$. Esta función y las demás funciones trigonométricas inversas son multiformes, y se definen de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(z + \sqrt{z^2-1}) \qquad \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

1.17.7. Funciones Hiperbólicas Inversas

Las funciones hiperbólicas inversas se pueden obtener de forma similar a las funciones trigonométricas inversas, obteniéndose:

$$\operatorname{senh}^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \qquad \operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2+1}}{z}\right)$$

1.18. CÁLCULO DIFERENCIAL COMPLEJO

1.18.1. Límites

Sea $f(z)$ una función compleja de la variable compleja z, y sea f_0 una constante compleja. Si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f_0| < \varepsilon$$

para todo z tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

entonces se dice que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$$

es decir, que $f(z)$ tiene por límite f_0 cuando z tiende hacia z_0. Algunas de las fórmulas de límites que se estudiaron en el cálculo elemental tienen sus homólogas en el caso de funciones de variable compleja y se pueden demostrar usando la definición de límite.
Sean f_0 y g_0 los límites cuando z tiende a z_0 de dos funciones $f(z)$ y $g(z)$, respectivamente. Luego

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = f_0 \pm g_0,$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = f_0 g_0,$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f_0}{g_0}, \quad \text{si } g_0 \neq 0$$

Límites en y hacia el Infinito

Antes de establecer los límites al infinito, es conveniente dar el concepto del punto al infinito en el plano complejo.

Plano extendido y representación esférica

Se introduce el plano extendido el cual es $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty$. Para lograr esto y dar una imagen concreta de $\mathbb{C}_\infty$ se representa $\mathbb{C}_\infty$ como la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, es decir:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Sea $N = (0, 0, 1)$; donde N es el polo norte de dicha esfera. Además se identifica $\mathbb{C}$ como el plano que corta la esfera a través del Ecuador. Ahora para cada z en $\mathbb{C}$ considérese el segmento en $\mathbb{R}^3$ cuyos extremos son z y N. Dicho segmento intersecta la esfera en un solo punto $Z \neq N$. Si $|z| > 1$ entonces z se ubica en el hemisferio norte; en caso contrario, si $|z| < 1$ entonces z se ubica en el hemisferio sur; también para $|z| = 1$, $Z = z$. A medida que $|z| \to \infty$ se asume que Z se aproxima a N; por lo tanto se identifica N y el punto ∞ en $\mathbb{C}_\infty$. La imagen a continuación muestra la representación esférica.

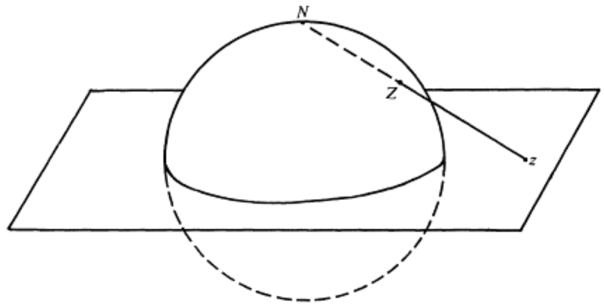


Figura 1-5: Proyección esférica de un número complejo

Límites en y hacia el infinito

Mediante la transformación $w = 1/z$, cuando $z = 0$ es llevado a $w = \infty$ que se conoce ecomo punto al infinito en el plano w. De forma similar, $z = \infty$ denota al punto al infinito en el plano z.
La afirmación

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. Además se puede observar que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

si y solo si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Ahora, si

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = f_0$$

entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f_0| < \varepsilon$$

siempre que

$$|z| > \frac{1}{\delta}$$

luego

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = f_0$$

si y solo si

$$\lim_{z\to z_0} \left(\frac{1}{z}\right) = f_0$$

1.18.2. Continuidad

La definición de continuidad para las funciones complejas de una variable compleja es análoga a la definición en el caso de funciones reales de una variable real. Se dice que una función $w = f(z)$ es continua en $z = z_0$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

- $f(z_0)$ está definido,

- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.

A consecuencia de dichas condiciones, se concluye que

$$\lim_{z\to z_0} = f(z_0)$$

Existen propiedades importantes de las funciones continuas, las cuales son:

- Las sumas, las diferencias y los productos de funciones continuas son funciones continuas. El cociente de dos funciones continuas es continuo salvo en los puntos en que se anula el denominador.

- La composición de funciones continuas da como resultado una función continua.

- Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán continuas en todo punto en el que $f(z)$ sea continua. A la inversa, $f(z)$ será continua en todo punto en el que u y v lo sean.

- Si $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$, entonces $|f(z)|$ también es continua en $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ es acotada y cerrada, existe un número real positivo M, tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en $\mathcal{R}$. M puede escogerse de tal manera que la igualdad sea válida para al menos un valor de z en $\mathcal{R}$.

1.18.3. La Derivada Compleja

Dada una función de variable compleja $f(z)$, la derivada en z_0, $f'(z_0)$, se define de la siguiente manera, siempre y cuando existan los límites indicados.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Esta expresión es similar a la expresión de la derivada en funciones de variable real. Para poseer una derivada en un punto dado, la función de variable compleja ha de ser continua en dicho punto, pero el solo hecho de ser continua no basta para garantizar la existencia de la derivada.

1.18.4. Reglas De Diferenciación

Sean $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ funciones analíticas de z, y c una constante, entonces se cumplen las siguientes reglas de derivación:

- Derivada de la adición o sustracción.
$$\frac{d}{dz}(f(z) \pm g(z) = f'(z) \pm g'(z).$$
- Derivada de una constante c por una función.
$$\frac{d}{dz}cf(z) = c\frac{d}{dz}f(z) = cf'(z).$$
- Derivada de un producto.
$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$
- Derivada de un cociente, siempre que $g(z) \neq 0$.
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}.$$
- Regla de la cadena.
$$\frac{d}{dz}f(g(z)) = \frac{df}{dg}g'(z)$$

1.18.5. Derivadas de Funciones Elementales

Al igual que en las funciones de variable real, las derivadas de funciones elementales de una variable compleja se definen de manera similar. A continuación se muestran las derivadas de funciones elementales complejas:

1. $\dfrac{d}{dz}c = 0$
2. $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$
4. $\dfrac{d}{dz}c^z = c^z \ln c$
5. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z$
6. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z$
7. $\dfrac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$
8. $\dfrac{d}{dz}\cot z = -\csc z$
9. $\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$
10. $\dfrac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$
11. $\dfrac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$
12. $\dfrac{d}{dz}\log_a z = \dfrac{\log_a e}{z}$
13. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\dfrac{d}{dz}\cos^{-1} z = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\dfrac{d}{dz}\tan^{-1} z = \dfrac{1}{1+z^2}$
16. $\dfrac{d}{dz}\cot^{-1} z = -\dfrac{1}{1+z^2}$
17. $\dfrac{d}{dz}\sec^{-1} z = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\dfrac{d}{dz}\csc^{-1} z = -\dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z$
20. $\dfrac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z$
21. $\dfrac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$
22. $\dfrac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$
23. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$
24. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$
25. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
28. $\dfrac{d}{dz}\coth^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
29. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = -\dfrac{1}{z\sqrt{1-z^2}}$
30. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = -\dfrac{1}{z\sqrt{z^2+1}}$

1.18.6. Funciones Analíticas

Se dice que una función $f(z)$ es analítica[7] en z_0 si $f'(z)$ no solo existe en z_0, sino en todo punto de alguna vecindad de z_0.
Así, para que una función sea analítica en un punto, no sólo debe tener derivada en dicho punto, sino en todos los puntos del interior de un circulo de radio distinto de cero centrado en el punto.

Teorema 1 *Si la función $f(z)$ es analítica en z_0, entonces $f(z)$ es continua en z_0.*

Prueba: Ya que

$$f(z_0+h)-f(z_0)=\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\cdot h$$

donde $h=\Delta z\neq 0$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} f(z_0+h)-f(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h=f'(z_0)\cdot 0=0$$

Por hipótesis $f'(z_0)$ existe. Entonces

$$\lim_{h\to 0} f(z_0+h)-f(z_0)=0$$

Luego

$$\lim_{h\to 0} f(z_0+h)=f(z_0)$$

demostrando así que $f(z)$ es continua en z_0
Se demostró que toda función analítica en z_0 es continua en dicho punto; sin embargo, una función continua no siempre va a ser analítica, basta con mostrar un contraejemplo, la función $f(z)=\overline{z}$ es continua en cualquier punto z_0 pero no es analítica en ningún punto. La siguiente prueba muestra que $\overline{z}$ efectivamente, no es analítica. Entonces

$$\frac{d}{dz}\overline{z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\Delta y}-\overline{x+iy}}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\frac{d}{dz}\overline{z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{x-iy+\Delta x-i\Delta y-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

Si $\Delta y=0$, el límite exigido es $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

Si $\Delta x=0$, el límite exigido es $\lim_{\Delta y\to 0}\dfrac{-i\Delta y}{\Delta y}=-1$.

Entonces ya que el límite depende de la manera como $\Delta z\to 0$, la derivada no existe, es decir, $f(z)=\overline{z}$, no es analítica.

[7] Como sinónimos de analítica suelen usarse también los términos regular y holomorfa.

1.18.7. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ sea una función analítica en una región $\mathcal{R}$ es que, en dicha región u y v satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann[8].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Si las derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en $\mathcal{R}$.

1.18.8. Coordenadas Polares de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Cuando $z_0 \neq 0$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden reformular en coordenadas polares mediante la transformación de coordenadas (véase forma polar de los números complejos). Cuando $w = f(z)$, las partes real e imaginaria de $w = u + iv$ se expresan en términos de las variables x e y, o bien, de r y θ, así como las derivadas parciales de primer orden se pueden expresar también en términos de x e y o en términos de r y θ como sigue

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Después se concluye que

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{dv}{d\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

[8]Estas importantes ecuaciones se llaman así en honor al matemático francés Augustin Cauchy (1789-1857), generalmente considerado como su descubridor, y al matemático alemán George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), quien pronto encontró importantes aplicaciones de estas ecuaciones en su trabajo sobre las funciones de variable compleja

1.18.9. Funciones Armónicas

Considerese una función analítica $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. Las funciones u y v satisfacen entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Supóngase ahora que se pueden diferenciar nuevamente las ecuaciones del tema anterior (la primera ecuación se deriva respecto a x; y la segunda con respecto a y). Se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Así

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si se hubiera hecho lo contrario, es decir, derivar la primera ecuación respecto a y; mientras que la segunda se deriva respecto a x, se obtendría

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Así pues, tanto la parte real como la imaginaria de una función analítica deben satisfacer una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

La cual se conoce como la ecuación de Laplace. Entonces, a partir de lo anterior se afirma que una función es armónica en un dominio si satisface la ecuación de Laplace en dicho dominio.

2 TEORÍA DE INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE COMPLEJA

2.1. TEOREMAS FUNDAMENTALES

Como en el caso real, en los complejos se distinguen entre integrales definidas e indefinidas. Una integral indefinida es una función cuya derivada es igual a una función analítica dada en una región; en muchos casos elementales se pueden hallar integrales indefinidas por inversión de formulas de derivación bien conocidas. Las integrales definidas se toman sobre arcos diferenciables o diferenciables a trozos, y no están limitadas a funciones analíticas.

2.1.1. Integrales Curvilíneas

La generalización más inmediata de una integral definida real es la integral definida de una función compleja sobre un intervalo real. Si $f(t) = u(t) + iv(t)$ es una función continua definida en un intervalo (a, b), se define

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \tag{2-1}$$

Esta integral posee la mayoría de las propiedades de la integral real. En particular, si c es una constante compleja, $c = \alpha + i\beta$, se obtiene

$$\int_a^b cf(t) = c\int_a^b f(t)dt \tag{2-2}$$

ya que al desarrollar ambos lados, se debe llegar a la siguiente igualdad

$$\int_a^b (\alpha u - \beta v)dt + i\int_a^b (\alpha v + \beta u)dt$$

Ahora, cuando $a \leq b$, se verifica la desigualdad fundamental

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt \tag{2-3}$$

Para un valor nulo de $f(t)$ o cuando $a = b$, esta demostración es inmediata; en caso contrario, para demostrar esta desigualdad, primero se establece que el valor de la integral compleja definida es un número complejo. Si ρ es el módulo y θ un argumento de dicho valor complejo, entonces

$$\int_a^b f(t)dt = \rho e^{i\theta}$$

Despejando ρ, se tiene

$$\rho = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt$$

Como el módulo de un número complejo es un número real, entonces el lado derecho ha de ser también un número real. Luego, partiendo del hecho de que la parte real de un número real es el propio número y recordando que $\mathrm{Re}\{\int_a^b f(t)dt\} = \int_a^b \mathrm{Re}\,[f(t)]\,dt$, entonces el miembro de la derecha puede reescribirse así

$$\int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt = \mathrm{Re}\left\{\int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt\right\} = \int_a^b \mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta} f(t)\right\} dt$$

entonces

$$\rho = \int_a^b \mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta} f(t)\right\} dt$$

Ahora bien, tomando el termino que está dentro de la integral

$$Re\left\{e^{-i\theta} f(t)\right\} \leq \left|e^{-i\theta} f(t)\right| = \left|e^{-i\theta}\right| |f(t)| = |f(t)|$$

y, en consecuencia,

$$\rho \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Recordando que ρ es el módulo o valor absoluto de la integral definida en (a, b) de $f(t)$, entonces, la desigualdad queda demostrada para $f(t)$ no nula.

Ahora, considérese un arco γ diferenciable a trozos, de ecuación $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Si la función $f(z)$ está definida y es continua sobre γ, entonces $f\,[z(t)]$ es también continua, y se puede poner

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\,[z(t)]\, z'(t)dt \tag{2-4}$$

Si $z'(t)$ no es continua, hay que subdividir el intervalo de integración de manera conveniente, omitiendo el parámetro t donde $z'(t)$ no es continua. Siempre que se considere una integral curvilínea sobre un arco γ se supondrá tácitamente que γ es diferenciable a trozos. El valor de la integral (2-4) es invariante si se sustituye la representación paramétrica $z(t)$ por $z\,[t(\tau)]$, dado en un intervalo $\alpha \leq \tau \leq \beta$ sobre $a \leq t \leq b$; suponiendo también que $t(\tau)$ sea diferenciable a trozos. Mediante la regla correspondiente al cambio de variable de integración, se tiene

$$\int_a^b f\,[z(t)]\,z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f\,\{z\,[t(\tau)]\}\,z'\,[t(\tau)]\,t'(\tau)dt$$

Pero $z'\,[t(\tau)]\,t'(\tau)$ es la derivada de $z\,[t(\tau)]$ con respecto a τ y, por consiguiente, la integral (2-4) tiene el mismo valor tanto si γ está representado por la ecuación $z = z(t)$ como si lo está por $z = z\,[t(\tau)]$.
Se entiende que si γ está descrita por $z(t)$, $a \leq t \leq b$ entonces el arco opuesto $-\gamma$ está descrito por $z = z(t)$, con intervalo $-b \leq t \leq -a$. Entonces, la integral curvilínea compleja de $f(z)$ tomada sobre el arco $-\gamma$ está definida como

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f\,[z(-t)]\,[-z'(-t)]\,dt$$

por un cambio de variable ($z = -z$, $a = -b$, $b = -a$), la integral anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$-\int_a^b f\,[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

En conclusión

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \tag{2-5}$$

La integral (2-4) posee también una propiedad aditiva, por ejemplo, si γ_1 está descrita por $z_1(t)$, $a \leq t \leq m$; y γ_2 por $z_2(t)$, $m \leq t \leq b$ y siendo $z_1(m) = z_2(m)$ se denota $\gamma_1 + \gamma_2$ al contorno definido por

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

En general, se puede subdividir un arco γ en un número finito de subarcos, como sigue

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n,$$

y la integral curvilínea se puede expresar como

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz \tag{2-6}$$

Ejemplo 1 *Evalúe*

$$\int_{3i}^{2+4i} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$$

a lo largo de las rectas de $(0, 3)$ *a* $(2, 3)$ *y de* $(2, 3)$ *a* $(2, 4)$.

Desarrollo A lo largo de la recta de $(0, 3)$ a $(2, 3)$, $y = 3$, $dy = 0$ y la integral de línea es igual a

$$\int_{x=0}^{2} (6 + x^2)dx = 12 + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}.$$

A lo largo de $(2, 3)$ a $(2, 4)$, $x = 2$, $dx = 0$, la integral es igual a

$$\int_{y=3}^{4} (6 - y)dy = (24 - 18) - \left(8 - \frac{9}{2}\right) = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}.$$

Además de las integrales mostradas anteriormente, también se puede considerar integrales curvilíneas con respecto a $\overline{z}$. La definición más conveniente es mediante doble conjugación:

$$\int_\gamma f d\overline{z} = \overline{\int_\gamma \overline{f} dz}$$

Utilizando esta notación se pueden introducir integrales curvilíneas con respecto a x o a y mediante las expresiones

$$\int_\gamma f dx = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma f dz + \int_\gamma f d\overline{z}\right)$$

$$\int_\gamma f dy = \frac{1}{2i}\left(\int_\gamma f dz - \int_\gamma f d\overline{z}\right)$$

Ahora, tomando la integral curvilínea

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

Con $f(z) = u + iv$ y $z = x + iy$ se tiene

$$\int_\gamma (u + iv)(dx + idy)$$

$$\int_\gamma u\, dx + iu\, dy + iv\, dx - v\, dy$$

$$\int_\gamma (u\, dx - v\, dy) + i \int_\gamma (u\, dy + v\, dx) \tag{2-7}$$

de esta manera, se separan las partes real e imaginaria de una integral curvilínea.

Ejemplo 2 *Evalúe*

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz$$

desde $z = 0$ *hasta* $z = 4 + 2i$ *a lo largo de* γ*, la cual está dada por* $z = t^2 + it$

Desarrollo: Los puntos 0 y $4+2i$ sobre γ corresponden a $t = 0$ y $t = 2$, respectivamente. Entonces, la integral es

$$\int_{t=0}^{2} \overline{(t^2 + it)}\, d(t^2 + it) = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\, dt$$

Al integrar, se obtiene:

$$\frac{t^4}{2}\bigg|_0^2 - i\,\frac{t^3}{3}\bigg|_0^2 + \frac{t^2}{2}\bigg|_0^2 = 10 - \frac{8i}{3}.$$

Una integral curvilínea esencialmente diferente se obtiene por integración con respecto a la longitud de arco, denotada de la siguiente manera

$$\int_\gamma f ds = \int_\gamma f\,|dz| = \int_a^b f\,[z(t)]\,|z'(t)|\,dt \tag{2-8}$$

donde s es la longitud de arco medida desde el punto $z(a)$ de γ. Así pues, la integral $\int_\gamma |z'(t)|\,dt$ es la longitud del arco γ. Esta integral es también independiente de la elección del parámetro. En contraste con (2-5) se tiene ahora que

$$\int_{-\gamma} f\,|dz| = \int_\gamma f\,|dz|$$

mientras que (2-6) siga siendo válida en la misma forma. La desigualdad

$$\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \int_\gamma |f|\cdot|dz| \tag{2-9}$$

es una consecuencia de (2-3), es decir:

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| = \left|\int_a^b f\,[z(t)]\,z'(t)\right|\,dt.$$

y aplicando (2-3), se obtiene

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq \int_a^b |f\,[z(t)]\,z'(t)|\,dt.$$

Luego
$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq \int_a^b |f[z(t)]|\,|z'(t)|\,dt.$$
Luego, se cumple (2-9).
Para $f = 1$, la integral (2-8) se reduce a $\int_\gamma |dz|$, que es por definición la longitud de γ. Como ejemplo se calcula la longitud de una circunferencia. De la ecuación paramétrica $z = z(t) = a + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, de una circunferencia completa se obtiene $z'(t) = i\rho e^{it}$ y por tanto,
$$\int_0^{2\pi} |z'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \rho dt = 2\pi\rho$$
como era de esperar.
Integrales curvilíneas de la forma $\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ se estudian a menudo como funciones del arco γ. Se supone entonces que p y q están definidas y son continuas en una región Ω y que γ puede variar en dicha región. Una clase importante de integrales está caracterizada por la propiedad de que la integral sobre un arco depende únicamente de sus extremos. En otras palabras: si γ_1 y γ_2 tiene los mismos orígenes y extremos, se exige que $\int_{\gamma_1} p\,dx + q\,dy = \int_{\gamma_2} p\,dx + q\,dy$. Decir que una integral depende sólo de los extremos equivale a decir que la integral sobre cualquier curva cerrada es cero. En efecto, si γ es una curva cerrada, entonces γ y $-\gamma$ tienen los mismos extremos, y si la integral depende únicamente de estos, se obtiene
$$\oint_\gamma = \oint_{-\gamma} = -\oint_\gamma$$
y, por tanto, $\oint_\gamma = 0$. Recíprocamente, si γ_1 y γ_2 tienen los mismos extremos, entonces $\gamma_1 - \gamma_2$ es una curva cerrada, y si la integral sobre cualquier curva cerrada se anula, se sigue que $\oint_{\gamma_1} = \oint_{\gamma_2}$. El teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente bajo la cual una integral curvilínea depende únicamente de los extremos:

Teorema 2 *La integral curvilínea $\int_\gamma p\,dx + q\,dy$, definida en Ω, depende sólo de los extremos de γ si y sólo si existe una función $U(x, y)$ en la región Ω con derivadas parciales $\partial U/\partial x = p$, $\partial U/\partial y = q$.*

Prueba: La suficiencia es inmediata, pues al reemplazar se obtiene,
$$\int_\gamma p\,dx + q\,dy = \int_\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\,y'(t)\right) dt$$
$$\int_\gamma p\,dx + q\,dy = \int_a^b \frac{d}{dt} U[x(t), y(t)]\,dt = U[x(b), y(b)] - U[x(a), y(a)],$$

y se puede apreciar que esta diferencia depende únicamente de los puntos extremos. Ahora, para demostrar la necesidad se elige un punto (x_0, y_0) en Ω, se une con el punto (x, y) mediante una línea poligonal γ, contenida en Ω, cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados y se define una función mediante

$$U(x,y) = \int_\gamma p\,dx + q\,dy$$

Puesto que la integral depende sólo de los extremos, la función está bien definida. Además, si se elige horizontal el último segmento de γ, se mantiene y constante de manera que varíe x sin cambiar los otros segmentos. Se elige a x como parámetro obteniendo:

$$U(x,y) = \int^x p(x,y)dx + k$$

donde k es una constante, y donde el límite inferior de la integral es irrelevante. De esta expresión se deduce inmediatamente que $\partial U/\partial x = p$; De manera similar, eligiendo vertical el último segmento y sin variar el parámetro en y, se puede demostrar que $\partial U/\partial y = q$

Se acostumbra escribir $dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy$ y decir que una expresión $p\,dx + q\,dy$ que puede escribirse en esta forma es una diferencial exacta. Así, pues, una integral depende únicamente de los extremos si y sólo si el integrando es una diferencial exacta. Obsérvese que p, q y U pueden ser reales o complejas. La función U, si existe, está determinada de manera única salvo una constante aditiva, pues si dos funciones tienen las mismas derivadas parciales, su diferencia ha de ser una constante.

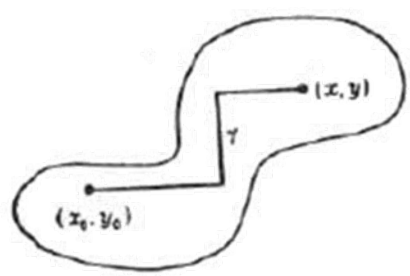


Figura 2-1: Caso en el cual el último segmento es horizontal.

Cuándo es $f(z) = f(z)dx + if(z)dy$ una diferencial exacta? De acuerdo con la definición, debe existir una función $F(z)$ en Ω con derivadas parciales

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = f(z)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = if(z)$$

Si es así, $F(z)$ cumple con la ecuación de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y}$$

puesto que $f(z)$ es por hipótesis continua (de no ser así $\int_\gamma f\,dz$ no estaría definida), $F(z)$ es analítica con derivada $f(z)$.
La integral $\int_\gamma f\,dz$, con f continua, depende únicamente de los extremos de γ si y sólo si f es la derivada de una función analítica en Ω.
Como aplicación inmediata del resultado anterior se tiene que

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = 0 \tag{2-10}$$

para todas las curvas ceradas γ, con tal que el entero n sea mayor o igual que cero. En efecto, $(z-a)^n$ es la derivada de la función $(z-a)^{n+1}/n+1$, la cual es analítica en todo el plano. Si n es negativo, pero distinto de -1, se verifica el mismo resultado para todas las curvas cerradas que no pasan por a, pues en la región complementaria del punto a la integral indefinida es todavía analítica y uniforme. Para $n=-1$, (2-10) no siempre se verifica. Por ejemplo, si se Considera una circunferencia C de centro a, representada por la ecuación $z = a + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Se obtiene

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

2.1.2. Teorema de Cauchy

Ya se vio anteriormente que la integral de una función $f(z)$ a lo largo de cualquier curva cerrada γ tiene valor cero. A continuación se presentará un teorema que da otras condiciones que garantizan que el valor de la integral de $f(z)$ a lo largo de una curva cerrada simple es cero. Este teorema es importante en la teoría de funciones de Variable Compleja y, más adelante se apreciarán algunas extensiones de dicho teorema.
Sea γ una curva cerrada simple $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, que va en sentido contrario a las manecillas del reloj[1], y supóngase que $f(z)$ es analítica en todo punto interno a γ y sobre los puntos de dicha curva. De 2-7 se tiene:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\oint_\gamma (u\,dy + v\,dx) \tag{2-11}$$

[1]Por lo general, cuando una curva va en sentido contrario a las manecillas del reloj, se le conoce como curva que va en sentido positivo.

Haciendo aclaración que esta ecuación se aplica para cualquier curva cerrada, no precisamente simple. A continuación se muestra un resultado de Cálculo avanzado que permite expresar las integrales de línea como integrales dobles. Concretamente, si dos funciones reales $P(x,y)$ y $Q(x,y)$, junto con sus derivadas parciales de primer orden, son continuas en la región cerrada R que forman los puntos interiores y la frontera de γ, el teorema de Green[2] asegura que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ahora bien, como $f(z)$ es continua en R, por ser analítica, las funciones u y v son también continuas en R. Por otro lado, si $f'(z)$ es continua sobre R, entonces las primeras derivadas parciales de u y v también lo son. Entonces, mediante el Teorema de Green, la ecuación (2-11) queda de la siguiente manera

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{2-12}$$

Pero, recordando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

los integrandos de las dos integrales dobles son cero en R. De esta manera, cuando f es analítica en R y $f'(z)$ es continua en dicha región, entonces

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{2-13}$$

Este resultado fue obtenido por Augustin Louis Cauchy en la primera mitad del siglo XIX.

Ante este resultado, la orientación que tome γ es irrelevante, es decir, que 2-13 se cumple, aun cuando γ va en sentido negativo, ya que de 2-5 y aplicando lo mencionado antes, se obtiene

$$-\oint_{-\gamma} f(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

2.1.3. Teorema de Cauchy-Goursat

Edouard Goursat (1858-1936) fue el primero en demostrar que no era necesario que una función f fuese continua para que cumpliese con el teorema de Cauchy. Por consiguiente, se enuncia una versión modificada de dicho teorema, conocida como el teorema de Cauchy- Goursat.

[2]Dicho teorema se llama así por el científico inglés George Green (1793-1841).

Teorema 3 *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a una curva cerrada simple y sobre dicha curva γ, entonces*

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Para esta demostración se aplicará lo que se conoce como Lema de Goursat y, una vez demostrado dicho lema, se procederá a demostrar el teorema modificado.
Se empieza tomando subconjuntos de Ω, conformados por los puntos internos y los puntos frontera de la curva cerrada simple γ, ésta a su vez está orientada positivamente. Para ello, se trazan rectas paralelas a los ejes coordenados equidistantes entre sí, formando cuadrados que pueden ser completos o parciales. Estos últimos son aquellos cuadrados que contienen puntos no pertenecientes a Ω. De esta manera, se procede a exponer y demostrar el lema de Goursat.

Lema 1 *Sea f una función analítica en la región cerrada Ω constituida por los puntos interiores y los puntos frontera de la curva cerrada simple orientada positivamente γ. Para todo $\varepsilon > 0$, la región puede ser recubierta con un número finito de cuadrados y cuadrados parciales, indicados por $j = 1, 2, \cdots, n$, tales que en cada uno de ellos haya un punto fijo z_j para el cual la desigualdad*

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \qquad (z \neq z_j) \tag{2-14}$$

se satisface para todos los demás puntos de ese cuadrado o cuadrado parcial.

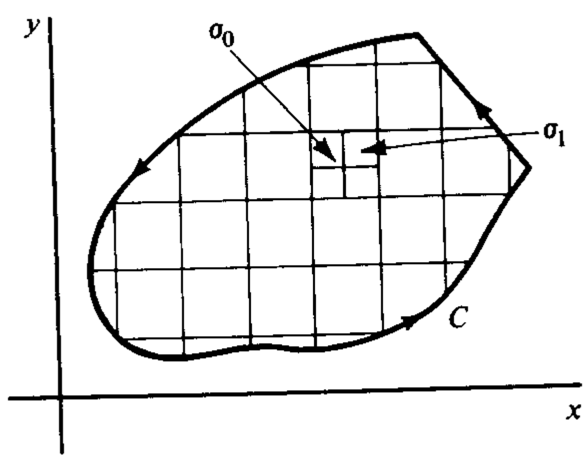


Figura 2-2: Ω dividida por sectores rectangulares

Prueba Para empezar la demostración, basta considerar el caso de un punto excepcional z_j, ahora, se toma el cuadrado o cuadrado parcial (σ_0) que contenga dicho punto y se divide en cuadrados más pequeños uniendo los puntos medios de los lados opuestos (en el caso de los cuadrados parciales, se hace el mismo procedimiento, omitiendo los puntos no pertenecientes a Ω), se toma el cuadrado que no tenga a z_j de σ_0 denotándolo como σ_1, y así sucesivamente tomando los cuadrados pequeños donde no haya z_j, formando una sucesión de cuadrados encajados, es decir,

$$\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \cdots \sigma_{k-1} \supset \sigma_k \supset \cdots$$

Se afirma que existe un punto z_0 común a los cuadrados encajados σ_k, además de algunos puntos de Ω. Los tamaños de los cuadrados van decreciendo de manera que cualquier vecindad δ de z_0 contienen estos cuadrados cuando las diagonales son menores a δ.
La función f es analítica en Ω, y por ende, analítica en z_0. Es decir que $f(z_0)$ existe y se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ (por más pequeño que sea), existe una vecidad $|z - z_0| < \delta$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

Pero la vecindad $|z - z_0| < \delta$ contiene un cuadrado σ_K cuando K es lo suficientemente grande de manera que la diagonal de σ_K sea menor a δ. Como consecuencia, z_0 puede tomar el valor de z_j, de manera que se satisface (2-14)en la subregión σ_k o una parte de σ_k. Entonces se llega a una contradicción, pues es necesario subdividir σ_k, de esta manera se comprueba el lema.
Ahora, estando comprobado el lema, se procede a demostrar el teorema en cuestión. Entonces, dado ε un positivo arbitrario. Se define sobre el $j-$ésimo cuadrado o cuadrado parcial la función

$$\delta_j(x) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j), & \text{si } z \neq z_j, \\ 0, & \text{si } z = z_j. \end{cases} \tag{2-15}$$

Se tiene de (2-14) que

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon \tag{2-16}$$

para todo z que forma la subregión. La función $\delta_j(z)$ es continua en la subregión ya que $f(z)$ lo es y

$$\lim_{z \to z_j} \delta_j(z) = 0.$$

Ahora, sean γ_j ($j = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots,\, n$) los contornos orientados positivamente de los cuadrados o cuadrados parciales que recubren la región Ω. Ahora, sobre cualquier γ_j y despejando $f(z)$ de (2-15) se obtiene

$$f(z) = \delta_j(z)(z - z_0) + f'(z_j)(z - z_0) + f(z_j)$$

Luego

$$\oint_{\gamma_j} f(z)dz = \oint_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_0)\, dz + f'(z_j) \oint_{\gamma_j} (z - z_0)\, dz + f(z_j) \oint_{\gamma_j} dz \qquad \text{(2-17)}$$

Pero 1 y $(z - z_0)$ se anulan por ser continuas, de manera que la anterior expresión se reduce a

$$\oint_{\gamma_j} f(z)dz = \oint_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_0)\, dz \qquad (j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n). \qquad \text{(2-18)}$$

y entonces

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\, dz$$

ya que hay subregiones que se cancelan entre sí debido a los lados comúnes y a la orientación de éstos, sólo quedan las integrales que forman γ, luego, de (2-17) se obtiene

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} \delta j(z)(z - z_j)\, dz$$

y haciendo una generalización de la desigualdad triangular se obtiene

$$\left| \oint_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \oint_{\gamma_j} \delta_j(z)(z - z_j)\, dz \right|. \qquad \text{(2-19)}$$

Ahora, denótese a la longitud del lado de σ_j como s_j. Como en la $j-$ésima integral, tanto z como z_j están dentro de σ_j, es decir, que la distancia entre la variable y el punto es, a lo sumo, la diagonal de σ_j. Entonces

$$|z - z_j| \leq \sqrt{2} s_j.$$

Y por (2-16) se sabe que cada valor absoluto de la sumatoria en (2-18) cumple con la condición

$$|(z - z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{2} s_j \varepsilon. \qquad \text{(2-20)}$$

Ahora, si se tiene que el perímetro de σ_j es $4s_j$, entonces sea A_j el área del cuadrado, y se puede apreciar que

$$\left| \oint_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)\, dz \right| < \sqrt{2} s_j \varepsilon 4 s_j = 4\sqrt{2} A_j \varepsilon. \qquad \text{(2-21)}$$

En caso de ser un cuadrado parcial, su longitud no excede de $4s_j + L_j$, donde éste último es la longitud de aquella parte que es común con γ. Entonces se tiene que

$$\left| \oint_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)\, dz \right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon(4s_j + L_j) < 4\sqrt{2}A_j\varepsilon + \sqrt{2}SL_j\varepsilon. \tag{2-22}$$

Donde S es la longitud del lado de un cuadrado que encierra a γ y a los cuadrados que recubren a Ω.
Ahora, se tiene, a partir de (2-18), (2-20) y (2-21) que

$$\left| \oint_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leq \left(4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL \right) \varepsilon.$$

Como el valor de ε es arbitrario, se toma la cantidad más pequeña posible, de esta manera, la parte izquierda queda igual a cero, demostrando así el teorema.

Ejemplo 3 *Calcule*

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$$

donde γ está dada por la elipse

$$(x-3)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Como $f(z)$ es analítica en todo el punto del plano complejo excepto en cero y dicho punto no está en γ, entonces la integral es cero.

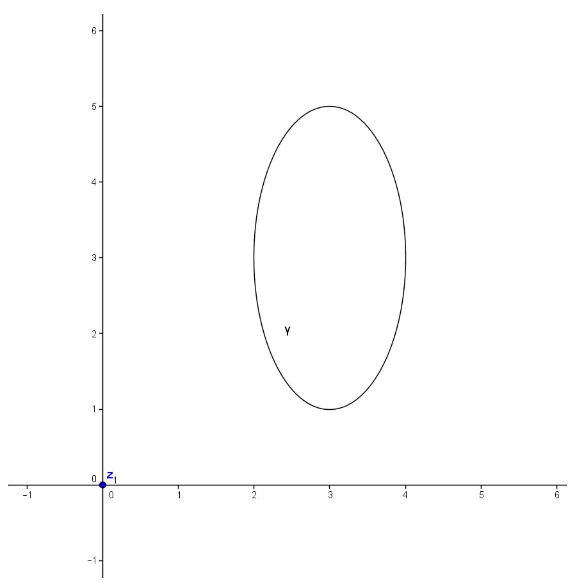


Figura 2-3: Representación gráfica del ejemplo

2.2. DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS Y MÚLTIPLEMENTE CONEXOS

Un dominio D es simplemente conexo cuando toda curva cerrada simple encierra solamente puntos pertenecientes a dicho dominio. De otra forma, se puede decir que un dominio simplemente conexo es aquella región sin agujeros"; de lo contrario, si dicho dominio tiene uno o más agujeros se le conoce como un dominio múltiplemente conexo. Se puede afirmar que el Teorema de Cauchy-Goursat se cumple para dominios simplemente conexos, ya sean curvas cerradas simples o curvas cerradas que se auto intersecan un número finito de veces, ya que f es analítica en todo punto interior a γ o sobre ésta. Además, si γ se interseca finitas veces consta de un número finito de curvas cerradas y, aplicando el teorema de Cauchy-Goursat sobre esas curvas se cumple para γ.
El teorema de Cauchy-Goursat también se puede aplicar para dominios múltiplemente conexos, el siguiente teorema demostrará que es posible

Teorema 4 *Supóngase que*

1. *γ es una curva cerrada simple, orientada positivamente;*

2. *γ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ denota un número finito de curvas cerradas simples dentro de γ, orientadas positivamente y cuyos interiores no tienen puntos en común (Figura 2-4)*

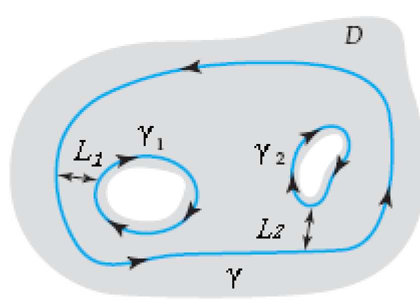


Figura 2-4: Dominio triplemente conexo

Si una función f es analítica en la región cerrada formada por los puntos interiores a γ o la propia γ, excepto los puntos interiores de cada γ_k, entonces

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0 \tag{2-23}$$

Prueba Se introducen caminos poligonales L_j conformados por segmentos finitos, si se toma el ejemplo de la Figura 2-4 se introduce un camino que conecte la curva exterior γ con la curva interna γ_1 y otro que conecte γ con γ_2. Gracias a esas dos conexiones, se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat y, como resultado dará cero, pues se puede apreciar que los caminos poligonales se anulan. El siguiente corolario se conoce como el principio de deformación de caminos, el cual, con lo demostrado anteriormente, formula lo siguiente:

Corolario 1 *Sean γ_1 y γ_2 curvas cerradas simples positivamente orientadas, donde γ_2 es interior a γ_1 (Figura 2-4). Si f es analítica en la región cerrada que forman estos contornos, entonces*

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{2-24}$$

Se tiene que

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

y tomando la propiedad del arco opuesto (2-5) se obtiene

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

y aplicando nuevamente la propiedad del arco opuesto, se obtiene (2-24).

2.3. FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

A continuación se van a presentar dos fórmulas integrales: la primera es conocida simplemente como la fórmula integral de Cauchy; mientras que la otra fórmula se conoce como la fórmula integral de Cauchy para derivadas que, como su nombre lo dice, será útil para calcular derivadas de orden superior.

2.3.1. Fórmula integral de Cauchy

Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D y z_0 es cualquier punto en D, el cociente $f(z)/(z - z_0)$ no está definido para z_0 y no es analítica en D. Por lo tanto, no se puede concluir mediante teorema de Cauchy-Goursat que la integral del cociente alrededor de γ que contiene a z_0 sea cero. En efecto, se puede apreciar que la integral del cociente alrededor de γ tiene como valor $2\pi i \cdot f(z_0)$, gracias a la fórmula integral de Cauchy. El siguiente teorema demostrará la razón de ser de esta fórmula.

Teorema 5 *Suponga que la función f es analítica en un dominio simplemente conexo D y sea γ una curva cerrada simple ubicada dentro de D. Entonces para cada z_0 en γ se cumple que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \tag{2-25}$$

Prueba: Sea un dominio simplemente conexo D, γ una curva cerrada simple dentro de D y z_0 un punto interior de γ. Además, sea C una circunferencia con centro en z_0 y con radio lo suficientemente pequeño tal que C esté situada dentro de γ. Por el principio de deformación de curvas, se puede escribir

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \tag{2-26}$$

Se pretende mostrar, entonces, que el valor de la derecha es $2\pi i \cdot f(z_0)$, entonces:

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{C} \frac{f(z_0)-f(z_0)+f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\oint_{C} \frac{1}{z-z_0}\,dz + \oint_{C} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \tag{2-27}$$

y ahora, se sabe de

$$\oint_{C} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \tag{2-28}$$

Entonces

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot 2\pi i + \oint_{C} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \tag{2-29}$$

Desde que f sea continua en z_0, se sabe que para todo ε positivo arbitrario, existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ siempre que $|z-z_0| < \delta$. En particular, se escoge un número $\rho < \delta$ cuyo valor va ser el radio de C, es decir, $|z-z_0| = \rho$, entonces el valor absoluto de la integral

$$\left|\oint_{C} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

Es decir, el valor absoluto de la integral puede hacerse pequeño de manera arbitraria tomando ρ lo más pequeño posible. Puede suceder únicamente si la integral es cero. Entonces (2-26) es

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot 2\pi i.$$

Y dividiendo por $2\pi i$, se comprueba que el teorema es cierto.

Ejemplo 4 *Evalúe*

$$\oint_\gamma \frac{z^2 - 4z + 4}{z - i}\, dz,$$

donde γ *es la circunferencia* $|z| = 2$

Desarrollo: Primero se identifica $f(z) = z^2 - 4z + 4$ y $z_0 = i$, como $z_0 = i$ es un punto dentro de γ como se puede apreciar en la figura 2-5. Ahora, se puede apreciar que f es analítica para todos los puntos dentro y sobre γ. Entonces por la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$\oint_\gamma \frac{z^2 - 4z + 4}{z - i}\, dz = 2\pi i\, f(i) = 2\pi i(3 - 4i) = \pi(6i + 8).$$

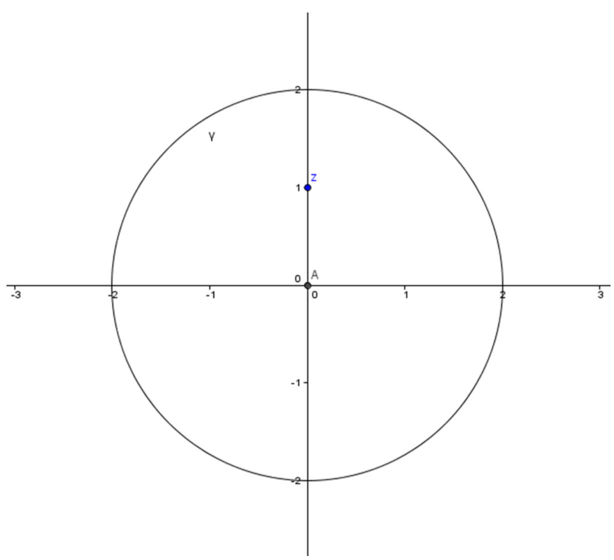


Figura 2-5: Ejemplo 3

2.3.2. Fórmula Integral de Cauchy para derivadas

Ahora se prueba que los valores de las derivadas $f^{(n)}(z_0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ de una función analítica están también dadas por una fórmula integral, conocida como la fórmula integral de Cauchy para derivadas. El siguiente teorema planteará la fórmula.

Teorema 6 *Supóngase una función* f *analítica en un dominio simplemente conexo* D*, y* γ *es cualquier curva cerrada simple dentro de dicho dominio, entonces para cada* z_0

dentro de γ se cumple que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}}\,dz \tag{2-30}$$

Prueba Esta prueba se hará mediante inducción matemática, entonces, para $n = 1$ se toma la definición de la derivada

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\Delta z}\left[\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\,dz - \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right]$$
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\,dz.$$

Aplicando el límite, se obtiene el resultado, sin embargo, es importante mostrar un procedimiento más riguroso, con el fin de justificar la existencia de la fórmula en la derivada de $n-$ésimo orden.

Retomando algunos conceptos preliminares, la continuidad de f en γ garantiza que f es acotada, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en γ.

Además sea L la longitud de γ y sea δ la distancia más corta entre puntos de γ y z_0, por lo tanto, para todo z en γ se tiene que $|z-z_0| \geq \delta$, o bien,

$$\frac{1}{|z-z_0|^2} \leq \frac{1}{\delta^2}$$

Además, si se escoge $|\Delta z| \leq \delta/2$, entonces

$$|z-z_0-\Delta z| \geq ||z-z_0| - |\Delta z|| \geq \delta - |\Delta z| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Entonces

$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|} \leq \frac{2}{\delta}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\left|\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz - \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz\right| &= \left|\oint_\gamma \frac{-\Delta z\, f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}dz\right| \\ &\leq \frac{2ML\,|\Delta z|}{\delta^3}\end{aligned}$$

Puesto que la última expresión se aproxima a cero cuando Δz tiende a cero, entonces se demostró que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint \gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$

cuando $n = 1$.

2.4. ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Un corolario inmediato e importante de la fórmula integral de Cauchy para derivadas (2-30) se muestra a continuación:

Teorema 7 *La derivada de una función analítica también es analítica. Supóngase que* f *es analítica en un dominio simplemente conexo* D*. Entonces* f *posee derivadas de todas las ordenes para cada* z *dentro del dominio* D*. Las derivadas* f', f'', $f''', \cdots$ *son funciones analíticas en* D*.*

Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio simple conexo D, se puede apreciar que sus derivadas de orden superior existen para cada z en D y f', f'', $f''', \cdots$ también serán analíticas, pues

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\vdots$$

se puede concluir que las funciones reales u y v tienen derivadas parciales continuas de orden superior para un punto de analiticidad.

2.4.1. Desigualdad de Cauchy

Se empezará con un resultado que se deriva de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

Teorema 8 *Supóngase que* f *es analítica en un dominio simple conexo* D *y* C *es una circunferencia definida mediante* $|z - z_0| = r$ *que está dentro del dominio* D*. Si* $|f(z)| \leq M$ *para todo punto* z *en* C*, entonces*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!\,M}{r^n}. \tag{2-31}$$

Prueba Obviamente

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\oint_C \left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right|
\end{aligned}$$

Tomando lo que está dentro de la integral y aplicando lo propuesto en la hipótesis, se obtiene

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{n+1}|} \leq \frac{M}{r^{n+1}}.$$

De esta manera, queda

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}}\oint_C dz,$$

al desarrollar la integral y, posteriormente simplificar

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}}2\pi r$$

quedando así demostrada la desigualdad (2-31).

2.4.2. El Teorema de Liouville

Una vez demostrada la desigualdad de Cauchy, se procede ahora a demostrar el siguiente resultado. La esencia de este teorema es que una función entera f, que es analítica para todo z, no puede ser acotada a menos que f sea una función constante.

Teorema 9 *Si f es entera y acotada en todo el plano complejo, la función $f(z)$ es constante en todo el plano.*

Prueba Supóngase una función f como una funcion entera y acotada, esto es, $|f(z)| \leq M$ para cualquier z dentro del plano complejo, entonces para cualquier punto z_0, por desigualdad de Cauchy, se tiene que $|f'(z_0)| \leq M/r$. Haciendo r arbitrariamente grande, $|f'(z_0)|$ se puede hacer tan pequeño como se desee. Esto implica que $f'(z_0) = 0$ para todo punto z_0 en el plano complejo. Por lo tanto, la función f ha de ser constante.

2.4.3. El Teorema Fundamental del Álgebra

El Teorema de Liouville permitir establecer un resultado general que se mencionó antes en los temas preliminares, más no se probó. Este resultado es vital en el álgebra elemental y se conoce como el Teorema Fundamental del Álgebra.

Teorema 10 *Si $p(z)$ es un polinomio no constante, entonces la ecuación $p(z) = 0$ tiene al menos una raíz.*

Prueba Supóngase que el polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

para n mayor que cero, no es cero para cualquier complejo z. Esto implica que el recíproco de $p(z)$, $f(z) = 1/p(z)$ es una función entera. Ahora

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \frac{1}{|z|^n \, |a_n + a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n|}. \end{aligned}$$

Por tanto, se puede apreciar que $|f(z)|$ tiende a cero cuando $|z|$ va tomando valores más grandes y se deduce que la función $f(z)$ debe ser acotada para z finito. Entonces se sigue del Teorema de Liouville que $f(z)$ es una constante, y por lo tanto $p(z)$ es constante. Pero esta es una contradicción en el supuesto que se hace de que $p(z)$ no es un polinomio constante. Concluyendo así que debe existir al menos un z que satisfaga la ecuación $p(z) = 0$.

2.4.4. El Teorema de Morera

Este teorema es nombrado así después de que Giacinto Morera diera un criterio importante para la analiticidad y frecuentemente se toma como el recíproco del teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema 11 *Si f es continua en un dominio simplemente conexo D y si*

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para cualquier curva cerrada γ en D, entonces f es analítica en D.

Prueba Por la hipótesis de continuidad de f y $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ para cuaquier curva γ dentro del dominio D, se concluye que dicha integral es independiente de trayecto. Se puede apreciar que la función F definida mediante

$$F(z) = \oint_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

es una antiderivada de f, donde s representa una variable compleja, z_0 un punto fijo dentro del dominio D y z representa cualquier punto en D; es decir, $F'(z) = f(z)$. Por lo tanto, F es analítica en D. Además, $F'(z)$ es analítica (si se tiene en cuenta el corolario visto al principio de esta sección) y como $f(z) = F'(z)$, se puede ver que f es analítica en D.

2.4.5. El Teorema del Valor Medio de Gauss

Teorema 12 *Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre una circunferencia γ con centro en z_0, entonces el promedio de los valores de $f(z)$ sobre γ es $f(z_0)$.*

Prueba Según fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Si γ tiene radio r, la ecuación de γ está dada por $|z - z_0| = r$, donde $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})\,ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta. = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$$

que es el resultado buscado.

2.4.6. El Teorema del Módulo Máximo

Anteriormente se vio que si una función f es continua en una región cerrada y acotada Ω, entonces f es acotada; esto es, existe alguna constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para z en Ω. Si la frontera de Ω es una curva cerrada simple γ, entonces el siguiente teorema mostrará que $|f(z)|$ asume su valor máximo para cualquier punto z sobre la frontera de γ.

Teorema 13 *Supóngase que f es analítica y no constante en una región cerrada Ω delimitada por una curva cerrada simple γ. Entonces el módulo $|f(z)|$ alcanza su máximo en γ.*

Prueba Por hipótesis, f es analítica y, por ende, continua en y sobre γ, se sigue que $|f(z)|$ tiene un valor máximo M al menos en un valor de z sobre o en el interior de γ. Suponga que la función no toma un valor máximo sobre γ sino en un punto interior a, es decir, $|f(a)| = M$. Sea γ_1 un círculo dentro de γ con centro en a (Véase Figura 2-3). Ahora, por hipótesis, f es no constante en γ_1, entonces debe existir un punto b en el interior de γ_1, tal que $|f(b)| < M$, o bien, $|f(b)| = M - \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$.
Ahora, debido a la continuidad de $|f(z)|$ en b, se puede apreciar que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que

$$||f(z)| - |f(b)|| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

siempre que $|z - b| < \delta$, es decir,

$$|f(z)| < |f(b)| + \frac{1}{2}\varepsilon = M - \frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos los puntos interiores a γ_2 con centro en b y radio δ.

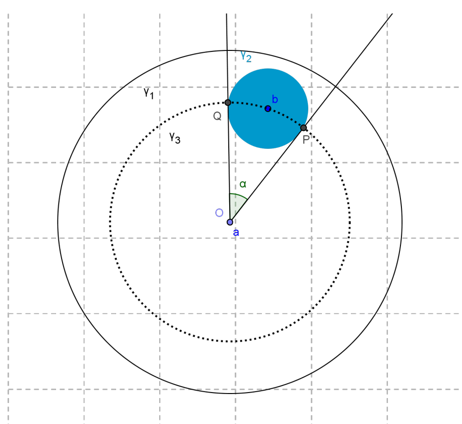


Figura 2-6:

Ahora se traza una circunferencia γ_3 con centro en a y que pasa por b. En una parte de este círculo se tiene, $|f(z)| < M - (\varepsilon/2)$; en la parte restante se tiene $|f(z)| < M$. Si se toma el ángulo de las circunferencias en sentido contrario a las manecillas del reloj desde OP y $\angle POQ = \alpha$, se sigue, mediante teorema de valor medio de Gauss que si

$|b-a| = r$, entonces

$$\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1}{2\pi}\oint_0^{\alpha} f(a+re^{i\theta})\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\oint_{\alpha}^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\oint_0^{\alpha} \left|f(a+re^{i\theta})\right|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\oint_{\alpha}^{2\pi} \left|f(a+re^{i\theta})\right|\,d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\oint_0^{\alpha} \left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\oint_{\alpha}^{2\pi} M\,d\theta \\
&\leq \frac{\alpha\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\pi} + \frac{M(2\pi-\alpha)}{2\pi} \\
&\leq M + \frac{\alpha\varepsilon}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Es decir, $|f(a)| = M \leq M - (\alpha\varepsilon/4\pi)$, cosa que es imposible, llegando así a una contradicción. Entonces se concluye que $|f(z)|$ no alcanza su máximo en ningún punto interior de γ, por lo que debe tomar su máximo sobre γ.

2.4.7. El Teorema del Módulo Mínimo

Si la condición de que $f(z) \neq 0$ para todo z en Ω se adiciona a la hipótesis del anterior teorema, entonces el módulo $|f(z)|$ también alcanza su mínimo en γ.

Teorema 14 *Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre la curva cerrada simple γ. Si $f(z) \neq 0$ en el interior de γ, $|f(z)|$ debe tomar su valor mínimo sobre γ.*

Prueba Por hipótesis, $f(z)$ es analítica dentro y sobre γ y como $f(z) \neq 0$ dentro de γ, se deduce que $1/f(z)$ es analítica dentro de γ. Según el Teorema del Módulo Máximo se deduce que $1/f(z)$ no puede tomar un máximo dentro de γ y así, $|f(z)|$ no toma máximos en γ. Luego, puesto que $|f(z)|$ tiene un mínimo, éste debe ocurrir sobre γ.

3 SERIES Y RESIDUOS

Como consecuencia de la Fórmula integral de Cauchy para derivadas de orden superior, se puede apreciar más adelante que f puede expandirse como una serie de potencias centrada a un punto determinado siempre que f sea continua. En caso contrario, f se puede expandir mediante series de Laurent. La noción de las series de Laurent sigue el concepto de un residuo, y esto, por consiguiente sigue a otras formas de evaluar integrales complejas, y en algunos casos, integrales reales.

3.1. SUCESIONES Y SERIES

3.1.1. Sucesiones

Una sucesión $\{z_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{Z}^+$ y cuyo rango es un subconjunto tomado del plano complejo. Es decir, que a cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \cdots$ se asigna un número complejo z_n.
Si

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L,$$

se dice que la sucesión es convergente. En otras palabras, $\{z_n\}$ converge a L si para cada $\varepsilon > 0$ se puede hallar N tal que $|z_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$; de otra forma, si la sucesión no tiene límite, entonces la sucesión diverge. Si una sucesión converge para todos los valores z en una región Ω, se dice que Ω es la región de convergencia de la sucesión.
A continuación se menciona el criterio de convergencia:

Teorema 15 *Una sucesión $\{z_n\}$ converge a un número complejo $L = a + ib$ si y solo si $Re\{z_n\}$ converge a $Re\{L\} = a$ e $Im\{z_n\}$ converge a $Im\{L\} = b$.*

Prueba Para cada $\varepsilon > 0$ se puede hallar N tal que $|z_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$.
Si $z_n = x_n + iy_n$, se tiene que $|(x_n - a) + i(y_n - b)| < \varepsilon$ siempre que $n > N$.
Ahora, se tienen

$$|x_n - a| \leq |(x_n - a) + i(y_n - b)| < \varepsilon$$

y

$$|y_n - b| \leq |(x_n - a) + i(y_n - b)| < \varepsilon.$$

Cumpliendo así con la convergencia.

Ejemplo 5 *Considere la sucesión*

$$\left\{\frac{3+ni}{n+2ni}\right\}$$

Desarrollo Reescribiendo, se obtiene

$$z_n = \frac{(3+ni)(n-2ni)}{n^2+4n^2} = \frac{3+2n}{5n} + i\left(\frac{n-6}{5n}\right) = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}.$$

Cuando $n \to \infty$. Entonces la secuencia converge a $\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$.

3.1.2. Series Infinitas

Una serie infinita de números complejos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_k + \cdots$$

es convergente si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, donde

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

converge. Si S_n tiende a L a medida que n tienda a infinito, se dice que la serie converge a L o que la suma de la serie es L.

3.1.3. Serie Geométrica

Una serie geométrica es cualquier serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} az^{n-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^k + \cdots \tag{3-1}$$

Para (3-1), el $n-$ésimo término de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^k. \tag{3-2}$$

3.1.4. Convergencia Absoluta y Convergencia Condicional

Definición Una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} z_k$ se dice que es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_k|$ converge. Y una serie infinita es condicionalmente convergente si converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |z_k|$ diverge.

3.1.5. Pruebas de Convergencia

A continuación se mencionan dos pruebas de convergencia de series infinitas.

Teorema 16 *Suponga una serie de términos complejos distintos de cero $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L \tag{3-3}$$

Se tienen las siguientes condiciones:

(i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

(ii) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Prueba

- (i) Puede elegirse un entero N tan grande que para todo $n \geq N$,

  $$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq r$$

  r es una constante tal que $L < r < 1$. Así

  $$\begin{aligned} |z_{N+1}| &\leq |z_N| \\ |z_{N+2}| &\leq |z_{N+1}| < r^2 |z_N| \\ |z_{N+3}| &\leq |z_{N+2}| < r^3 |z_N| \\ &\vdots \end{aligned}$$

  Sumando,

  $$|z_{N+1}| + |z_{N+2}| + |z_{N+3}| + \cdots \leq |z_N| (r_1 + r_2 + r_3 + \cdots),$$

  por ende $\sum |z_n|$ converge.

- (ii) Si $L > 1$, entonces para n suficientemente grande se verifica $|z_{n+1}/z_n| > 1$, o de forma equivalente $|z_{n+1}| > |z_n|$, luego el término general z_n no tiende a cero y como consecuencia la serie es divergente.

- (iii) Considérense las series reales, y por ende, complejas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_2}.$$

  En ambos casos, cuando $L = 1$, la primera es divergente y la segunda convergente.

Teorema 17 *Suponga una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L \tag{3-4}$$

Se presentan las siguientes situaciones:

(i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

(ii) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Prueba

- (i) Como $L < 1$, considérese un nmero r tal que $L < r < 1$. Por definición de lmite, para n suficientemente grande se verifica $\sqrt[n]{|z_n|} < r$, o de forma equivalente $|z_n| < r^n$. Como la serie de término general r^n es convergente (geométrica de razón un número en módulo menor que 1), se deduce que la serie de término general $|z_n|$ es convergente.

- (ii) Si $L > 1$, por definición de lmite se verifica para n suficientemente grande $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, o de forma equivalente $|z_n| > 1$. El límite de z_n no tiende a cero, luego la serie es divergente.

- (iii) Se sabe por teoría de series reales que la primera es divergente y la segunda convergente. Esto demuestra que el criterio de la raíz no decide sobre el carácter de la serie si $L = 1$.

Estas pruebas se aplicarán a las series de potencias.

3.1.6. Series de Potencias

La noción de las series de potencias es importante en el estudio de las funciones analíticas. Una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots , \tag{3-5}$$

donde los coeficientes a_k son constantes complejas, se conoce como una serie de potencias en $z - z_0$. La serie de potencias (3-5) está centrada en z_0; el punto complejo z_0 se le denomina como el centro de la serie. Cabe aclarar, inclusive cuando $z = z_0$, que $(z - z_0)^0 = 1$.
Cada serie de potencias (3-5) tiene un radio de convergencia. Análogo al concepto de un intervalo de convergencia para una serie de potenciaws real, una serie de potencias compleja tiene un círculo de convergencia, cuyo círculo tiene centro z_0 de radio R para cada serie de potencia que converge a cualquier punto dentro del círculo $|z - z_0| = R$

3.2. SERIES DE TAYLOR

3.2.1. Derivación e Integración de Series de Potencias

Los tres teoremas que siguen indican que una función f se define mediante una serie de potencias y que es continua, derivable e integrable dentro del círculo de convergencia.

Teorema 18 *Continuidad: Una serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^n$ *representa una función continua dentro de su círculo de convergencia* $|z - z_0| = R$.

Teorema 19 *Derivación Término a Término: Una serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^n$ *puede ser derivable término a término dentro de su círculo de convergencia* $|z - z_0| = R$.

Derivar una serie de potencias permite que

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

la sumatoria empieza ahora desde $n = 1$, pues, al empezar en cero, el primer término también es cero. Se puede verificar que la función original y su derivada tienen el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| = R$. Pues la derivada de una serie de potencias es otra serie de potencias, a partir de lo anterior, se puede deducir que una serie de potencias original se puede derivar cuantas veces se quiera. Siguiendo así un coroloario, el cual una serie de potencias define una función infinnitamente derivable dentro de un círculo de convergencia y cada serie derivada tiene el mismo radio de convergencia R que la serie original.

Teorema 20 *Integración término a término: Derivación Término a Término: Una serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^n$ *puede ser integrable término a término dentro de su círculo de convergencia* $|z-z_0| = R$*, para cada curva* γ *dentro del círculo de convergencia.*

El teorema establece que

$$\oint_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)n\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \oint_\gamma (z-z_0)^n\,dz$$

siempre que γ esté en el interior de $|z-z_0| = R$. La integración indefinida también se puede llevar a cabo término a término

$$\oint \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \oint (z-z_0)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} + K$$

donde K es una constante. Y ambas series tienen el mismo círculo de convergencia.

3.2.2. Series de Taylor

Suponga que una función f está representada por una serie de potencias dentro del círculo $|z-z_0| = R$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + z_2(z-z_0)^2 + z_3(z-z_0)^3 + \cdots \tag{3-6}$$

Ahora, se tiene que las derivadas de f son las series

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + 4a_4(z-z_0)^3 + \cdots \tag{3-7}$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} na_n(n-1)(z-z_0)^{n-2} = 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3(z-z_0) + \cdots \tag{3-8}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} na_n(n-1)(n-2)(z-z_0)^{n-3} = 3\cdot 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3 + \cdots \tag{3-9}$$

$$\vdots$$

Dado que la serie de potencias (3-6) representa una función f derivable dentro del círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, donde R es un número positivo o infinito, se concluye que una serie de potencias representa una función analítica dentro de su círculo de convergencia.
Existe una relación entre los coeficientes a_n en la función original y las derivadas de f. Evaluando (3-6), (3-7), (3-8) y (3-9) para $z = z_0$ se tiene

$$f(z_0) = a_0,\ f'(z_0) = 1!a_1,\ f''(z_0) = 2!a_2,\ f'''(z_0) = 3!a_3,$$

respectivamente. En general, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$, o

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}. \tag{3-10}$$

Y sustituyendo (3-10) en (3-6) se obtiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{3-11}$$

Esta serie es conocida como la serie de Taylor centrada en z_0. Una serie centrada en $z = 0$ es conocida como una serie de Maclaurin, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{3-12}$$

3.3. SERIES DE LAURENT

A continuación se muestra otra serie de potencias, esta vez alrededor de un punto singular z_0. Esta nueva serie involucrará potencias negativas y positivas de $z - z_0$.

3.3.1. Singularidades Aisladas

Suponga que $z = z_0$ es una singularidad de un función f. El punto $z = z_0$ se conoce como una singularidad aislada de f si existe un disco abierto agujerado $0 < |z - z_0| < R$ en el cual f es analítica. Por ejemplo, los valores $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de $f(z) = z/(z^2 + 4)$. Ambas son singularidades aisladas dado que f es analítica en cada punto de la vecindad definida por $|z - 2i| < 1$, excepto en $z = 2i$, y en cada punto de la vecindad $|z - (-2i) < 1|$, excepto en $z = -2i$. En otras palabras, f es analítica en los discos agujerados $0 < |z - 2i| < 1$ y $0 < |z + 2i| < 1$. Por otro lado, el punto de ramificación $z = 0$ no es una singularidad aislada de $\ln z$ ya que cada vecindad de $z = 0$ debe contener puntos negativos del eje real. Se dice entonces que un punto $z = z_0$ es una singularidad no aislada si cada vecindad de z_0 contiene al menos una singularidad, además de z_0.

3.3.2. Series de Laurent

Si $z = z_0$ es una singularidad de una función f, entonces ciertamente f no se puede expandir mediante series de potencias con z_0 como su centro. Sin embargo, alrededor de una singularidad aislada $z = z_0$, es posible representar f mediante una serie que involucra potencias enteras negativas y no negativas de $z - z_0$; es decir

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{3-13}$$

Tomando otro ejemplo más sencillo, $f(z) = 1/(z-1)$, el punto $z = 1$ es una singularidad aislada de f y, en consecuencia la función no se puede expandir por series de Taylor centrado en dicho punto. Sin embargo, f se puede expandir en una serie de la forma (3-13) que es válida para cada z cercana a uno. Y usando la notación de la sumatoria, se puede escribir (3-13) como la suma de dos series

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{3-14}$$

La sumatoria que contiene las potencias negativas en (3-14) se llama la parte principal; y la parte que contiene las potencias no negativas se llama la parte analítica de la serie. De manera más compacta, se puede escribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Las anteriores representaciones: (3-13), (3-14) y la forma compacta se conoce como una serie de Laurent o expansión de Laurent de f alrededor de z_0 en el anillo $r < |z - z_0| < R$.

Ejemplo 6 *Determine mediante series de Laurent la función*

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$$

Desarrollo: La función $f(z)$ no es analítica para la singularidad aislada $z = 0$ y por lo tanto, no se puede expresar como una serie de Maclaurin. Sin embargo, $\operatorname{sen} z$ es una función entera y se puede expresar como serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Ahora, dividiendo la serie por z^4 se obtiene una serie con potencias negativas y positivas como sigue

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!z}}_{\text{Parte principal}} + \underbrace{\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots}_{\text{Parte analítica}}$$

3.4. CEROS Y POLOS

A continuación, se categorizan las singularidades acorde al número de términos en la parte principal.

3.4.1. Clasificación de los Puntos Singulares Aislados

Un punto singular aislado $z = z_0$ de una función compleja f se le da una clasificación dependiendo de si la parte principal de la expansión de Laurent contiene cero, un número finito o un número infinito de términos. A continuación se muestra la representación por series de Laurent para cada uno de los tipos de singularidades

(i) Si la parte principal es cero, entonces $z = z_0$ es una singularidad evitable, es decir

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

(ii) Si la parte principal contiene un número finito de términos no nulos, entonces $z = z_0$ es conocido como un polo. Si, en este caso, el último coeficiente no nulo es a_{-k}, $k \geq 1$, entonces se dice que $z = z_0$ es un polo de orden k. Un polo de orden uno es comúnmente conocido como polo simple.

$$\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

y el polo simple se expresa como

$$\frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

(iii) Si la parte principal contiene un número infinito de términos no nulos, entonces $z = z_0$ se llama una singularidad esencial.

$$\cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Si se observa el ejemplo 4, f tiene dos términos no nulos en la parte principal de la serie, entonces se dice que $z = 0$ es un polo de orden dos.

3.4.2. Ceros

Cabe recordar que un número z_0 es un cero de una función f si $f(z_0) = 0$. Se dice que una función analítica f tiene un cero de orden k para $z = z_0$ si $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$,

$f''(z_0) = 0, \cdots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Un cero de orden uno se le llama un cero simple. Tomando el ejemplo 4, se tiene que los ceros de la función están dados por $z = n\pi$, siendo n un entero distinto de cero. Calculando la primera derivada, se tiene que

$$f'(z) = \frac{z\cos z - 4\operatorname{sen} z}{z^5},$$

y evaluando para $z = n\pi$ queda que $f'(n\pi) = \pm 1/(n\pi)^4$, distinto de cero. Entonces $z = n\pi$ es un cero simple.

El siguiente teorema es una consecuencia de los ceros de orden k

Teorema 21 *Una función f que es analítica en algún disco $|z - z_0| < R$ tiene un cero de orden k para $z = z_0$ si y solo si f se puede escribir como*

$$f(z) = (z - z_0)^k \phi(z), \tag{3-15}$$

donde ϕ es analítica para $z = z_0$ y $\phi(z) \neq 0$.

Prueba Se toma la función en forma de series de Taylor y asumiendo que los k primeros términos sea nulos, es decir

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + a_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \cdots$$

Al factorizar, se obtiene

$$(x - x_0)^k = \left[a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \cdots\right]$$

Donde se tiene que

$$\phi(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

concluyendo así que ϕ es una función analítica y que $\phi(z_0) = a_k \neq 0$ porque a_k en series de Taylor está dado por $f^{(k)}(z_0)/k!$. En el ejemplo 4 $\phi(z)$ está representada por

$$\phi(z) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!} - \cdots$$

3.4.3. Polos

De manera similar al tema anterior, se puede caracterizar un polo de orden k.

Teorema 22 *Una función f que es analítica en un disco agujerado $0 < |z - z_0| < R$ tiene un polo de orden k para $z = z_0$ si y solo si f se puede escribir como*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}, \tag{3-16}$$

donde ϕ es analítica para $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$.

Prueba Parcial A diferencia de la prueba parcial del teorema anterior, la función f se expresará como una serie de Laurent válida para algún disco agujerado $0 < |z - z_0| < R$, entonces

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Factorizando $1/(z-z_0)^k$, se confirma que la anterior ecuación se puede escribir en la forma $\phi(z)/(z-z_0)^k$, donde

$$\phi(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{k-2} + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + a_1(z-z_0)^{k+1} + \cdots$$

Por hipótesis, $z = z_0$ es un polo de orden k de f y se debe tener que $a_{-k} \neq 0$, definiendo que $\phi(z_0) = a_{-k}$, se sigue entonces que ϕ es analítica a lo largo del disco $|z - z_0| < R$. Tomando nuevamente el Ejemplo 4, f al tener un polo de orden dos para $z = 0$ se obtiene (3-16)

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^2}$$

donde

$$\phi(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \frac{z^7}{9!} - \cdots$$

Cálculo del Orden de un Polo

Supónga que f es el cociente de dos funciones f_1 y f_2 que tienen en z_0 un cero de orden k_1 y k_2, respectivamente, tal que $k_2 > k_1$. Se puede escribir entonces

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{(z-z_0)^{k_1}\phi_1(z)}{(z-z_0)^{k_2}\phi_2(z)}.$$

se sabe que ϕ_1 y ϕ_2 son analíticas y distintas de cero cuando están evaluadas por z_0. Entonces

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^{k_2-k_1}}$$

siendo $\phi(z) = \phi_1(z)/\phi_2(z)$. Entonces f tiene un polo de orden $k_2 - k_1$ en z_0.

3.5. RESIDUOS Y TEOREMA DEL RESIDUO

El coeficiente a_{-1} de $1/(z-z_0)$ en la serie de Laurent es conocida como el residuo de la función f para la singularidad aislada z_0. Se usará la notación $a_{-1} = \text{Res}(f(z), z_0)$ para denotar el residuo de f en z_0. Cabe recordar que si la parte principal de la serie de

Laurent en un anillo $0 < |z - z_0| < R$ contiene un número finito de términos con a_{-k} como el último coeficiente no nulo, entonces z_0 es un polo de orden k; en caso contrario, entonces z_0 es una singularidad esencial.
Retomando nuevamente el ejemplo 4, se puede apreciar que el coeficiente que va acompaado de $1/z$ $(z_0 = 0)$ es $1/3!$, por lo tanto

$$\text{Res}(f(z), 0) = 1/6$$

3.5.1. Residuo en un Polo Simple

Si f tiene un polo simple en $z = z_0$, entonces

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \tag{3-17}$$

Ya que f tiene un polo simple en $z = z_0$, su respectiva expansión por series de Laurent sobre un disco agujerado $0 < |z - z_0| < R$ tiene la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

donde $a_{-1} \neq 0$. Ahora, multiplicando a ambos lados de esta serie por $z - z_0$ y tomando el límite cuando z se acerque a z_0 se obtiene

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1} = \text{Res}(f(z), z_0).$$

3.5.2. Residuo en un Polo de Orden k

Si f tiene un polo de orden k para $z = z_0$, entonces

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z). \tag{3-18}$$

Prueba Por el hecho de que se asume que f tiene un polo de orden k para $z = z_0$, su expansión mediante series de Laurent convergente en un disco agujerado $0 < |z - z_0| < R$ debe tener la forma

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

donde $a_{-k} \neq 0$. Se multiplica ambos lados por $(z - z_0)^k$, obteniendo así

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{k-2} + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + a_1(z-z_0)^{k+1} + \cdots$$

Ahora, derivando $k-1$ veces ambos lados

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-z_0)f(z) = (k-1)!a_{-1} + k!a_0(z-z_0),$$

y aplicando el límite cuando z se acerque más a z_0, se obtiene

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-z_0)f(z) = (k-1)!a_{-1}.$$

Luego, recordando que el residuo es equivalente a a_{-1} y despejando éste se obtiene el resultado propuesto. Si se toma el ejemplo 4, no se puede aplicar este teorema, puesto que el límite es divergente.
El siguiente ejemplo mostrará el cálculo de residuos en polos simples y polos de orden k.

Ejemplo 7 *Encuentre el residuo de cada polo en la función*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

Desarrollo: $f(z)$ tiene un polo simple para $z=3$ y un polo de orden dos para $z=1$, Entonces:

- Para $z=3$, el residuo en unpolo simple está dado por (3-17), es decir:

$$\mathrm{Res}(f(z),3) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}$$

- Para el polo de orden dos $z=1$, se tiene, por (3-18)

$$\mathrm{Res}(f(z),1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} -\frac{1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}$$

3.5.3. Teorema del Residuo

Relación Entre la Integral de Línea y los Residuos

Sea f una función continua sobre una curva cerrada simple γ y dentro de dicha curva, excepto en z_0. Entonces el residuo de $f(z)$ en z_0, se determina como:

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz \tag{3-19}$$

Hay que tener en cuenta que el residuo se puede expresar como a_{-1} y que f al tener un punto singular z_0 se puede expresar como una serie de Laurent. Ahora, tomando la función en serie de Laurent e integrando término a término respecto a una circunferencia γ_1 con radio r y centro en z_0, se obtiene

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \oint_{|z-z_0|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n\,dz. \quad (3\text{-}20)$$

Ahora se sabe que cuando $n = -1$, la integral de línea es igual a $2\pi i$ (las demás se anulan), de manera que slo queda

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}. \quad (3\text{-}21)$$

Este resultado es importante para llevar a cabo la demostración del teorema de los residuos, el cual se expone de la siguiente manera:

Teorema 23 *Sea γ una curva cerrada simple y $f(z)$ analítica sobre dicha curva y dentro de ésta, excepto en singularidades aisladas z_1, z_2, $\cdots$, z_k. Entonces*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \mathrm{Res}(f(z), z_n) \quad (3\text{-}22)$$

Prueba Se toman los puntos singulares z_n, ($n = 1, 2, \cdots, k$) como centros de circunferencias γ_n positivamente orientados, interiores a γ y que no se intersequen con γ ni con otras circunferencias γ_n. Las circunferencias γ_n junto con γ forman la frontera de una región cerrada sobre la que f es analítica, y cuyo interior es un dominio múltiplemente conexo. Entonces, al saber que el teorema de Cauchy-Goursat aplica también para dominios múltiplemente conexos, se tiene que

$$\oint_\gamma f(z)\,dz - \sum_{n=1}^{k} \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz = 0$$

Reduciéndose a

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} 2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z), z_0).$$

Completando así la demostración.

Ejemplo 8 *Tomando el ejemplo 5, si se desea calcular su integral, donde γ es el rectángulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = \pm 1$*

Desarrollo: Como los polos $z = 3$ y $z = 1$ están dentro de γ, se tiene por el teorema del residuo que

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f(z),1) + \mathrm{Res}(f(z),3)] = 2\pi i \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 0.$$

4 Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

- Así como hay propiedades que comparten las variables real y compleja; La variable compleja tiene propiedades peculiares, las cuales no tiene la variable real. Y todo esto se debe a la presencia de la unidad imaginaria i.

- El teorema de Cauchy-Goursat representa una base sólida del análisis complejo, ya que de este tema se deriva el estudio de las integrales en regiones "con o sin agujeros", las fórmulas integrales para determinar la función y sus derivadas de orden superior en un punto dado z_0, y el desarrollo de integrales mediante el cálculo de los residuos.

- Por último, cabe aclarar que la integración en el plano complejo difiere bastante de las integrales en $\mathbb{R}$, ya que en $\mathbb{R}$ una integral en el intervalo $[a, b]$ de una función $f(x)$ tiene uno y solamente un camino; por otro lado, en $\mathbb{C}$ se tiene que establecer un camino desde a hasta b para determinar la integral de una función $f(z)$, debido a que a y b son puntos en el plano y no un intervalo de los valores que puede tomar la variable como en el caso real, además porque hay infinitas maneras de llegar de un punto al otro en el caso del plano complejo. Entonces, de esta manera es importante establecer esas diferencias, no solamente en la integración compleja sino en cualquier operación donde se pueda apreciar diferencia alguna respecto a lo que se conoce en $\mathbb{R}$.

4.2. Recomendaciones

- Es necesaria la implementación de una asignatura dedicada al análisis complejo dentro de la malla curricular de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC Duitama, para la formación del estudiante.

- Como existen otros temas que conforman las opciones de la Electiva Matemática, se recomienda entonces que se desarrollen trabajos de grado relacionados con los demás temas que permitan a los interesados abordar y profundizar estos.

Bibliografía

[1] AHLFORS, Lars. *Análisis de Variable Compleja: Introducción a la Teoría de Funciones Analíticas de una Variable Compleja*. Traducido por Antonio Pardo Fraile. Madrid. Aguilar S.A. de Ediciones, 1966.

[2] CHARRIS, Jairo; DE CASTRO, Rodrigo; VARELA, Januario. *Fundamentos del Análisis Complejo de una Variable*. Bogotá. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2000.

[3] CHURCHILL, Ruel; WARD, James. *Variable Compleja y Aplicaciones*. Traducido por Lorenzo Abellanas Rapun. Quinta Edición. Madrid. McGraw-Hill, 1992.

[4] CONWAY, John. *Functions of one Complex Variable*. Second Edition. New York. Springer-Verlag, 1978.

[5] KREYSZIG, Erwin. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Traducido por Rodolfo García Pia y Hugo Villagómez Velázquez. Tercera Edición. México. Limusa Wiley, 2003.

[6] LEVINSON, Norman; REDHEFFER, Raymond. *Curso de Variable Compleja*. Traducido por Luis Bou Garca. Barcelona. Editorial Reverté, 1990.

[7] SPIEGEL, Murray; LIPSCHUTZ, Seymour; SCHILLER, John; SPELLMAN, Dennis. *Variable Compleja*. Traducido por María del Carmen Hano Roa. Segunda Edición. México. McGraw-Hill, 2011.

[8] WUNSCH, David. *Variable Compleja con Aplicaciones*. México. Pearson Educación, 1999.

[9] ZILL, Dennis; SHANAHAN, Patrick. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Sudbury, MA. Jones and Bartlett Publishers, 2003.